

5.1 Kétten céllövésben versenyeznek, a két versenyző p_1 , illetve p_2 valószínűséggel ér el találatot ($p_1 < p_2$). Az ügyetlenebb kezd, majd felváltva lőnek. Aki először talál, az nyer.

a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy az ügyesebb nyer?

b) Mennyi a játék várható időtartama, ha percenként egy lövést végeznek?

c) A várható időtartam azonnal adódik, ha $p_1 = p_2$ (miért?). Ellenőrizzük le, hogy az előző kérdésre adott válaszunk ebben az esetben az, ami azonnal adódik.

5.2 Legyen X Binom(n, p) eloszlású valószínűségi változó. Milyen p értékre lesz maximális $\mathbf{P}\{X = k\}$, $k = 0, 1, \dots, n$? Ez arra példa, hogy a statisztikában hogyan becsülik meg p értékét, ha egy Binom(n, p) eloszlású valószínűségi változó megfigyelt értéke k . Ha feltesszük, hogy n ismert, akkor p -t azzal a \hat{p} értékkel becsüljük, amire $\mathbf{P}\{X = k\}$ maximális. Ezt a módszert hívják **maximum likelihood** becslésnek.

5.3 ••

a) Jelölje X egy szabályos kockadobás eredményét. Számoljuk ki X várható értékét és szórását.

b) András és Béla a következő játékot játsszák: feldobnak négy szabályos dobókockát; a négy dobás eredményét jelölje rendre X_1, X_2, X_3 és X_4 . András fizet Bélanak $(X_1 + X_2 - X_3 - X_4)^2$ forintot, Béla pedig Andrásnak $X_1 + X_2 + X_3 + X_4$ forintot. Melyiküknek kedvez a játék?

5.4 Anna és Bori egyforma erejű teniszjátékosok, minden játszmát, a többi játszmától függetlenül, $\frac{1}{2}$ valószínűséggel nyerhet meg bármelyikük. A tenisz mérkőzést az a játékos nyeri meg, amelyik előbb elér három játszmagyőzelmet. Jelölje X , hogy hány játszmából áll a mérkőzés. $\mathbb{E}X = ?$

5.5 Legyen X λ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{P}\{X = i\}$ i növekedésével először nő, majd monoton csökken, a maximumát a $i = \lfloor \lambda \rfloor$ -nél veszi fel. (Tipp: tekintsük $\mathbf{P}\{X = i\}/\mathbf{P}\{X = i - 1\}$ -et.)

5.6 Móricka, ha túrázni megy, minden lépésnél – az előzményektől függetlenül – valamekkora (kicsi) valószínűséggel hasraesik és megüti a térdét, illetve valamekkora (kicsi) valószínűséggel hanyatt esik és megüti a könyökét. Egy 10 kilométeres túrán átlagosan 3-szor szokta megütni a térdét és 2-szer a könyökét. Legfeljebb milyen hosszú túrára engedheti el az anyukája, ha azt akarja, hogy $\frac{2}{3}$ valószínűséggel térd- és könyöksérülés nélkül járja meg?

5.7 •• Egy forgalmas országútszakaszon gyakran szoktak radarozni. Tapasztalatok szerint annak valószínűsége, hogy 10 percen belül lesz olyan autó, amelyik átlépi a sebességhatárt, épp ugyanannyi, mint annak, hogy nem lesz ilyen autó.

a) Mi a valószínűsége, hogy 25 perc radarozás során (i) pontosan három; (ii) legalább három gyorsajtót mérnek?

b) Milyen hosszú időre tervezzék a rendőrök a radarozást ahhoz, hogy 98% valószínűséggel fogjanak legalább egy gyorsajtót?

5.8 Egy tábla mogyorós-mazsolás Boci csokiban átlagosan 30 mazsola van. Egy tábla csoki 15 kockából áll. Egy kocka csokiban 1/2 valószínűséggel nincsen mogyoródarab.

(a) Milyen eloszlású lesz az egy tábla csokiban levő mogyoródarabok száma?

(b) Letörünk 2 kockát és megesszük. Mennyi a valószínűsége, hogy az elfogyasztott csokiban levő mogyoró- és mazsoladarabok együttes száma legalább 2? Adjon minél egyszerűbb formulát válaszként.

5.9 Tegyük fel, hogy egy adott időben történt események száma λ paraméterű Poisson valószínűségi változó. Mutassuk meg, hogy ha minden eseményt p valószínűséggel számolunk, függetlenül a többi eseménytől, akkor a megszámlolt események száma λp paraméterű Poisson valószínűségi változó! Emellett adjunk intuitív érvelést arra, hogy miért kell ennek így lennie.

Az előzőek alkalmazására példa: Tegyük fel, hogy egy adott terület uránlelőhelyeinek száma Poi(10) eloszlású véletlen változó. Minden lelőhelyet a többitől függetlenül $\frac{1}{50}$ valószínűséggel fedeznek fel. Számoljuk ki annak a valószínűségét, hogy (a) pontosan 1, (b) legalább 1 és (c) legfeljebb 1 lelőhelyet fedeznek fel az adott idő alatt.

Bónusz a) Legyen X λ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó. Mutassuk meg, hogy

$$\mathbf{P}\{X \text{ páros}\} = \frac{1}{2}(1 + e^{-2\lambda}).$$

b) Adott egy hamis érménk, mely p valószínűséggel mutat fejet. Ezt az érmét 0 időpontban feldobjuk, és azt látjuk, hogy fejre esik. Egy λ paraméterű Poisson folyamat által megadott időpillanatokban az érmét újra és újra feldobjuk, míg egyéb időpontokban nem nyúlunk az érméhez. Mi a valószínűsége, hogy t -kor az érme fejet mutat?

c) Tegyük fel ismét, hogy az érme 0 időpontban fej-et mutat. A Poisson folyamat időpillanataiban ezúttal determinisztikus módon átforgatjuk (ha a fej oldalon áll, akkor az írás oldalra, ha az írás oldalon, a fej oldalra). Mi a valószínűsége, hogy t -kor az érme fejet mutat?

5.10 Egy erdő átlagos sűrűsége: 16 fa 100 m²-enként. A fák törzse teljesen szabályos, 20 cm átmérőjű kör alapú henger. Egy puskagolyót lövünk ki célzás nélkül, az erdő szélétől 120 m-re, kifelé az erdőből. Mennyi annak a valószínűsége, hogy eltalálunk egy fatörzset? (Tekintsünk el attól az apró zavaró tényezőtől, hogy a fák alapkörökének középpontjai min. 20 cm távolságban vannak.)

- 5.11 •• Az önkormányzat Randomvárosban ingyen wifi szolgáltatást biztosít. A wifi hotspot-ok elhelyezése véletlenszerű, sűrűségük 3 hotspot négyzetkilométerenként, hatótávolságuk 50 méter. Épp abban a pillanatban, amikor Móricka elindul otthonról az egyetemre, email-en tájékoztatják a hallgatóságot, hogy ma bombariadó miatt elmarad az oktatás. Móricka nyílegyenes úton megy az egyetemre, útközben 70% valószínűséggel értesül az ingyen wifin keresztül erről a hírről. Milyen messze lakik Móricka az egyetemtől?
- 5.12 Bulgáriában történt, hogy egymás utáni két héten kihúzták pontosan ugyanazokat a nyerőszámokat a lottón. Maradjunk hazai vizeken: a hazai, 90-ből 5-öt húzós lottón
- mi annak a valószínűsége, hogy jövő héten ugyanazokat a számokat húzzák, mint ezen a héten?
 - kicsit enyhítsük a kérdést: mi annak a valószínűsége, hogy a lottó 50 éves történetében (minden héten egy húzást feltételezve, szünet nélkül, évi 52 héttel számolva) valaha előfordul az, hogy két egymás utáni héten ugyanazt az öt számot húzzák?
 - még egy kicsit enyhítsük a kérdést: mi annak a valószínűsége, hogy a lottó 50 éves történetében (minden héten egy húzást feltételezve, szünet nélkül, évi 52 héttel számolva) valaha előfordul az, hogy olyan 5-öst húznak ki, ami már egyszer volt?

Adjunk numerikus értéket is.

- 5.13 (**Stefan Banach gyufásdoboz-problémája**) Egy szórakozott matematikus vesz két doboz gyufát. Mindkét doboz n szál gyufát tartalmaz. Egyik dobozt a bal, másikat a jobb zsebébe teszi. Valahányszor pipára akar gyújtani, véletlenszerűen kiveszi az egyik dobozt és abból elhasznál egy szál gyufát. Egyik alkalommal azt veszi észre, hogy az elővett gyufásdoboz már üres. Mi annak a valószínűsége, hogy ekkor a másik dobozban pontosan k elhasználatlan gyufaszál van még?
- 5.14 András és Béla következő játékot játsszák. András egy szabályos dobókockával dobál. Bélának nem árulja el, hogy hányadik dobásra sikerült először hatost dobnia, de azt elárulja, hogy hányadik dobásra adódott másodszer hatos. Ezek után Béla megtippeli, hogy András hányadik dobásra kapott először hatost. Hogyan érdemes Bélának tippelnie? Ha Béla okosan tippel, milyen valószínűséggel találja el az első hatos sorszámát?
- 5.15 •• Annának és Borinak van egy cinkelt érméje, amely $\frac{1}{3}$ valószínűséggel esik a Fej oldalára. Ezt felváltva dobálják, Anna kezd. Az nyer, aki a második fejet dobja, tehát pl. Anna: Fej, Bori: Fej esetén Bori nyert.
- Várhatóan hány érmedobás után fejeződik be a játék?
 - Feltéve, hogy Anna nyer, mi a valószínűsége, hogy az első fejet Bori dobta?
- Bónusz • Mekkora valószínűséggel nyer Anna?

- 5.16 Dobókockával addig dobálunk, amíg 1-től 6-ig minden szám legalább egyszer elő nem fordul. Mennyi a szükséges dobások számának várható értéke?
- 5.17 Egy urnában 4 piros és 4 kék golyó van. Véletlenszerűen kiválasztunk 4 golyót. Ha 2 közülük piros és 2 kék, akkor megállunk. Különben visszaradjuk a golyókat az urnába és újra választunk 4 golyót. Az egészet mindaddig folytatjuk, amíg 4 húzott golyóból pontosan 2 piros lesz. Mi a valószínűsége, hogy pontosan n -szer húzunk?
- 5.18 •• Az országban évente 100 ezer végzős gimnazistának kell pályát választania. Egy gimnazista 0.0001 valószínűséggel próbálkozik azzal, hogy úrhajósnak menjen. Az úrhajós felvételi vizsga kétfordulós, az első a jelentkező fizikai, a második a szellemi rátermettséget méri. Tegyük fel, hogy ezek független tulajdonságok. Az első vizsgán egy jelentkező 20% eséllyel megy át, a másodikon 50% eséllyel.
- Mekkora a valószínűsége, hogy jövőre legfeljebb egy ember megy át az úrhajós felvételi vizsgán?
 - Idén 10 ember ment át a felvételi első fordulóján. Mekkora a valószínűsége, hogy legalább kettőt felvesznek közülük?
 - Tavaly 3 jelentkezőt vettek fel úrhajósnak. Mekkora valószínűsége, hogy 2 ember bukott meg a felvételin?

- 5.21 Egy újságkihordó 100 forintért veszi és 150 forintért adja el az újságokat. Az el nem adott lapokat nem vásárolják tőle vissza. Ha az újságokra a napi igény binomiális eloszlású véletlen változó, $n = 10$ $p = \frac{1}{3}$ értékekkel, körülbelül hány lapot vegyen, ha várható profitját szeretné maximalizálni?
- 5.22 Egy országban a házaspárok az első fiúig vállalnak gyereket. Mi a nemek aránya ebben az országban? Igaz-e, hogy az egy családban született gyerekek neme független egymástól?

5.23 Hipergeometriai eloszlás tart a Binomiálishoz

Madarat gyűrűzünk: N madárból m gyűrűzött van. Képzeljük el, hogy a madárgyűrűzést évek óta csináljuk, a madárpopuláció is nő, és átlagosan a madarak egy bizonyos hányadát vagyunk képesek befogni. Pontosabban, legyen most $N \rightarrow \infty$, $\frac{m}{N} \rightarrow p$! Bizonyítsuk be, hogy ekkor, ha (fix) n elemű mintát veszünk a populációból, és X jelöli a gyűrűzött madarak számát az n elemű mintában, akkor X eloszlása binomiálishoz tart, azaz

$$\lim_{N \rightarrow \infty, m/N \rightarrow p} \mathbf{P}(X = i) \rightarrow \mathbf{P}(\text{Bin}(n, p) = i)!$$

- 5.24
 - Tekintsünk egy 30 fős, véletlenszerűen választott emberekből álló csoportot. Mi a valószínűsége, hogy van a köztük legalább két ember, akiknek ugyanakkor van a születésnapja?
 - Tekintsünk 200 véletlenszerűen választott embert. Mi a valószínűsége, hogy van köztük legalább egy, akinek ugyanakkor van a születésnapja, mint Mórickának?

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a vizsgált emberek közül senki sem született február 29-én.