

10.1 Legyen X_1, X_2, \dots független azonos eloszlású folytonos valószínűségi változók sorozata, legyen $N \geq 2$ olyan, hogy

$$X_1 \geq X_2 \geq \dots \geq X_{N-1}, \quad X_{N-1} < X_N.$$

Azaz az N -edik az első tagja a sorozatnak, ahol a sorozat növekvővé válik. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{E}(N) = e$. (Tipp: érdemes először kiszámolni $\mathbf{P}\{N \geq n\}$ -t.)

10.2 a) Legyenek X és Y független, nemnegatív értékű folytonos valószínűségi változók, melyekre $\mathbf{E}X < \infty$ és $\mathbf{E}Y < \infty$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\mathbf{E} \min\{X, Y\} = \int_0^\infty \mathbf{P}\{X \geq t\} \cdot \mathbf{P}\{Y \geq t\} dt.$$

b) Általánosítsuk az előbbi összefüggést tetszőleges k darab független, nemnegatív értékű folytonos X_1, X_2, \dots, X_k valószínűségi változóra, melyekről feltesszük, hogy véges a várható értékük:

$$\mathbf{E} \min\{X_1, X_2, \dots, X_k\} = \int_0^\infty \prod_{j=1}^k \mathbf{P}\{X_j \geq t\} dt.$$

c) Az a) kérdés feltételei mellett bizonyítsuk be, hogy

$$\mathbf{E} \max\{X, Y\} = \int_0^\infty [1 - \mathbf{P}\{X \leq t\} \cdot \mathbf{P}\{Y \leq t\}] dt.$$

d) Legyenek X_1, X_2, \dots, X_k független, $(0, 1)$ -en egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg az

$$\mathbf{E} \min\{X_1, X_2, \dots, X_k\}, \quad \mathbf{E} \max\{X_1, X_2, \dots, X_k\}$$

várható értékeket.

10.3 n -szer feldobunk egy p valószínűséggel fejet adó érmét. Számoljuk ki az $1, 2, \dots, k$ hosszú csupa fej részsorozatokat várható számát! ($1 \leq k \leq n$)

10.4 Tízszer feldobunk egy hamis érmét, amin a fej valószínűsége p . Jelölje X a tiszta sorozatok számát (mint a 4.4 feladatban). Mennyi X várható értéke? (Vigyázat: az érme ezúttal hamis.)

Bónusz Tekintsük az n hosszú $0 - 1$ kódokat, ahol minden koordináta független, p valószínűséggel $0, 1 - p$ valószínűséggel 1 . Gondoljunk ezekre úgy, mint egy gráf csúcsaira. Két csúcs közt menjen pontosan akkor él, ha csak a kódjuk legvégén lévő tiszta blokkban térnek el, vagyis valamely közös kezdeti rész után az egyik kód csupa 0 -val, a másik csupa 1 -gyel folytatódik. (Tehát pl. 1110011000 szomszédjai: $1110011001, 1110011011$ és 1110011111 .) Sorsolok egy 0 -val illetve egy 1 -gyel kezdődő kódot a fenti eloszlással, vagyis a többi koordinátát már függetlenül p valószínűséggel 0 -nak, $1 - p$ -vel 1 -nek. Mennyi az így kapott két kód közt húzott legrövidebb út várható értéke? Mi a válasz, ha $p = 1/2$? Segítség: írjunk fel két ilyen kódot, és találjuk ki, hogyan jutunk el egyiktől a másikig a legrövidebb módon! Hogy kapcsolódik ez vajon a tiszta blokkok számához? És: vigyázzunk, hogy az egyik kód 0 -val kezdődik a másik pedig 1 -gyel!

10.5 •• Egy urnában van M piros és N kék golyó. A golyókat visszatevés nélkül kihúzzuk egymás után az urnából. Tiszta sorozat alatt azokat a maximális hosszú húzásorozatokat értjük, melyek során a kihúzott golyók azonos színűek. Jelölje X , hogy az $N + M$ hosszú húzásorozatunk hány tiszta sorozatból áll. $\mathbf{E}X = ?$

10.6 Legyenek X_1, X_2, \dots, X_n független és azonos eloszlású folytonos valószínűségi változók. Azt mondjuk, hogy egy rekordérték tűnik fel j -kor ($j \leq n$), ha $X_j \geq X_i$ minden $1 \leq i \leq j$ esetén. Mutassuk meg, hogy

$$\text{a) } \mathbf{E}[\text{rekordértékek száma}] = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}.$$

$$\text{b) } \mathbf{D}^2[\text{rekordértékek száma}] = \sum_{j=1}^n \frac{j-1}{j^2}.$$

10.7 Legyenek X és Y független azonos eloszlású nemnegatív valószínűségi változók. $\mathbf{E} \frac{X}{X+Y} = ?$

10.8 Három próbálkozási lehetőségünk van, mindegyik próbálkozás azonos valószínűséggel sikeres. Jelölje X a sikeres próbálkozások számát. Ha tudjuk, hogy $\mathbf{E}(X) = 1.8$,

a) mennyi $\mathbf{P}\{X = 3\}$ lehetséges legnagyobb értéke?

b) mennyi $\mathbf{P}\{X = 3\}$ lehetséges legkisebb értéke?

Mindkét esetben találjunk ki egy valószínűségi forgatókönyvet, aminek eredménye $\mathbf{P}\{X = 3\}$, és ez az érték a lehető legnagyobb/legkisebb. (Tipp: a b) rész megoldását kezdhethetjük úgy is, hogy legyen U a $(0, 1)$ -en egyenletes valószínűségi változó, majd definiáljuk a próbálkozásokat U -val kifejezve.)

- 10.9 Lacika addig dobál egy dobókockát, amíg nem sikerül neki kétszer *egymás után* hatost dobni. Mennyi a szükséges dobások számának várható értéke? (Segítség: nézzünk feltételes várható értékeket!)
- 10.10 **a)** Ha $\mathbf{E}(X) = 1$ és $\mathbf{D}^2(X) = 5$, határozzuk meg $\mathbf{E}[(2 + X)^2]$ és $\mathbf{D}^2(4 + 3X)$ értékét.
b) Legyenek X és Y független azonos eloszlású valószínűségi változók μ várható értékkel és σ szórással. Számoljuk ki $\mathbf{E}[(X - Y)^2]$ értékét.
- 10.11 Legyenek X és Y független valószínűségi változók közös μ várható értékkel, de különböző σ_X és σ_Y szórással. μ értékét nem tudjuk, és egy mintavétel alapján az X és Y súlyozott átlagával szeretnénk becsülni. Azaz: μ értékére a $\lambda X + (1 - \lambda)Y$ becslést fogjuk adni, valamilyen λ paraméterrel. Hogyan válasszuk λ -t, hogy a becslésünk szórása minimális legyen? Miért érdemes ezt a λ -t használnunk?
- 10.12 **••** Legyen az (X, Y) pont egyenletes eloszlású a $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 1)$ pontok által meghatározott háromszögben.
a) Mi lesz az (X, Y) kétdimenziós eloszlás kovarianciamátrixa?
b) Legyen $Z = 3X + 4Y$. Mi lesz az (X, Z) kétdimenziós eloszlás kovarianciamátrixa?
- 10.13 **a)** Legyen X az a szám, ahányszor 1-est látunk, Y az a szám, ahányszor 2-est látunk ha n -szer dobunk egy szabályos kockával. Számoljuk ki e két valószínűségi változó korrelációs együtthatóját.
b) Egy dobókockát kétszer feldobunk. Legyen X a dobások összege, és Y az első dobás mínusz a második dobás. Számoljuk ki $\mathbf{Cov}(X, Y)$ -t. Függetlenek-e X és Y ?
- 10.14 A ruletkeeréken 37 mező van, 0-tól 36-ig számozva. Xavér mindig arra fogad, hogy az eredmény 19 vagy annál nagyobb szám, Yvett mindig arra, hogy az eredmény 3-mal való osztás szerinti maradéka 1 (tehát az $\{1; 4; 7; \dots; 34\}$ számok valamelyike). Tekintsünk 20 független pörgetést; jelölje X , illetve Y , hogy ennek során hányszor nyer Xavér, illetve Yvett. (Az is lehet, hogy egy pörgetésnél mindketten nyernek, és az is, hogy egyikük sem.) Számoljuk ki X és Y korrelációs együtthatóját.
- 10.15 **••** X és Y együttes sűrűségfüggvénye
- $$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{y} e^{-(y+x/y)}, & \text{ha } x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$
- a)** Határozzuk meg $\mathbf{E}(X)$ és $\mathbf{E}(Y)$ értékét, valamint mutassuk meg, hogy $\mathbf{Cov}(X, Y) = 1$.
b) Számoljuk ki $\mathbf{E}(X^2|Y = y)$ -t is.
- 10.16 Az X és Y valószínűségi változók együttesen abszolút folytonos eloszlásúak, X peremsűrűség-függvénye $f_X(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x}$ ha $x \geq 0$, és 0 ha $x < 0$ (legyen $\lambda = 1/2$); Y feltételes eloszlása X rögzítése mellett pedig egyenletes a $[0, X]$ intervallumon. Határozzuk meg
a) az együttes sűrűségfüggvényt (ügyeljünk a tartományokra),
b) Y peremsűrűség-függvényét és $\mathbf{E}(Y)$ -t,
c) $\mathbf{E}(Y|X = x)$ -t és $\mathbf{E}(X|Y = y)$ -t,
d) $\mathbf{E}(X)$ -t (itt egyszerűbb, ha használjuk az előző részfeladatot), illetve
e) $\mathbf{Cov}(X, Y)$ -t.
f) Emlékezzünk vissza a 9.14 feladatra.
- 10.17 **••** A 2 egység hosszúságú PQ szakaszt kettétörjük az egyenletes eloszlással választott R pontban. Jelölje a PR szakasz hosszát X . Ezek után a megmaradó, $2 - X$ egység hosszú RQ szakasz mentén választunk egyenletes eloszlással egy S töréspontot. Jelölje az RS szakasz hosszát Y .
(a) Írjuk fel az (X, Y) pár közös sűrűségfüggvényét. Figyeljünk a tartományokra.
(b) $\mathbf{E}(Y|X = x) = ?$ $\mathbf{E}(Y) = ?$
(c) Számoljuk ki $\mathbf{Cov}(X, Y)$ -t.
- 10.18 **••** Egy *gráf csúcsokból*, és a csúcsokat összekötő *élekből* áll. Tekintsünk egy gráfot, melynek n csúcsát 1-től n -ig megszámoztuk, és tegyük fel, hogy mind az $\binom{n}{2}$ csúcspár között egymástól függetlenül van él p valószínűséggel, és nincs él $1 - p$ valószínűséggel. (Ezt hívják Erdős-Rényi véletlen gráfnak.) Az i csúcs D_i *fokszáma* az i csúcsból kiinduló élek száma.
a) Mi a D_i véletlen szám eloszlása?
b) Határozzuk meg a D_i és D_j változók $\rho(D_i, D_j)$ korrelációs együtthatóját. (Tipp: definiáljuk X_i -t mint az i -ből induló, de nem j -be érkező élek számát, és I_{ij} -t mint az i és j közötti él meglétének indikátorát. Fejezzük ki D_i -t és D_j -t az X_i , X_j , és I_{ij} változókkal, ezután számoljunk korrelációt.)
- 10.19 Egy liftbe a földszinten belépő emberek száma egy ismeretlen eloszlású X valószínűségi változó, 1-nél nagyobb várható értékkel. n emelet van és minden ember egymástól függetlenül, azonos valószínűséggel száll ki az n emelet bármelyikén. Legyen Y az a valószínűségi változó, hogy hányszor áll meg a lift, míg az utolsó utast is kirakja. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbf{E}(Y) < \mathbf{E}(X)$.
- 10.20 Az előző feladatban tegyük föl, hogy X eloszlása Poisson, 10 várható értékkel. Számoljuk ki $\mathbf{E}(Y)$ -t.

10.21 Egy ember autóbaleseteinek száma egy adott évben λ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó. Ez a λ paraméter minden embernél más és más, a népesség 60 százalékánál 2, 40 százalékánál 3. Ha véletlenül kiválasztunk egy embert, mi a valószínűsége annak, hogy

- a) nem történt vele baleset,
- b) pontosan 3 balesetet szenvedett egy adott évben?
- c) Mi a feltételes valószínűsége, hogy pontosan 3 balesetet szenvedett egy adott évben, feltéve, hogy előző évben nem történt vele baleset?
- d) Ismételjük meg az előzőeket, ha az x -nél kisebb λ paraméterrel rendelkező emberek aránya a népességben $1 - e^{-x}$.

10.22 Legyenek X_1, X_2, \dots, X_n független és azonos eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg

$$\mathbf{E}(X_1 \mid X_1 + X_2 + \dots + X_n = x)$$

értékét. (Tipp: $\mathbf{E}(X_1 + X_2 + \dots + X_n \mid X_1 + X_2 + \dots + X_n = x)$.)

10.23 Hamis érmével dobunk, de nem tudjuk, hogy mennyire torzít az érme. Előzetesen annyit elárult nekünk a torz-érme gyár, hogy egyenletesen torzítják az érméket, vagyis mindenféle $p \in [0, 1]$ egyenletesen fordul elő. Az első írást n -szerre dobtuk (addig csupa fejet). Mit tippelünk, mekkora a p ? (Mi a legvalószínűbb p ?) Alulról illetve felülről (0-tól c -ig illetve c -től 1-ig) mekkora intervallumnak van már elég nagy (mondjuk 0.95-ös) valószínűsége, hogy oda esik a p ?