1.1 Hányféle (esetleg értelmetlen, de különböző) szót lehet kirakni a MISSISSIPPI betűiből (mindegyik betűt pontosan egyszer felhasználva)? Hát az ABRAKADABRA szó betűiből? Mi annak a valószínűsége, hogy ha felírjuk a betűket egy-egy kártyára, akkor jól megkeverve a paklit, a két szó egymást követve értelmesen kiolvasható lesz (abrakadabramississippi vagy fordítva)?

1.4 Egy társaság 8 nőből és 7 férfiból áll. Belőlük kell egy 4 nőből és 3 férfiból álló bizottságot alakítanunk. Hányféle különböző bizottság lehetséges, ha

- **a)** van két férfi, akik nem hajlandóak egy bizottságban dolgozni,
- **b)** van két nő, akik nem hajlandók egy bizottságban dolgozni,
- **c)** van egy nő és egy férfi, akik nem hajlandóak egy bizottságban dolgozni?

1.7 Egy 100 000 lakosú városban három újság jelenik meg: I, II, és III. A városlakók következő aránya olvassa az egyes újságokat:

I: 26%	I és II: 6%	I és II és III: 2%
II: 18%	I és III: 9%	
III: 22%	II és III: 5%	

(Azaz például 6000 ember olvassa az I és II újságokat (közülük 2000 a III újságot is).)

- **a)** Határozzuk meg, hányan nem olvassák a fenti újságok egyikét sem.
- **b)** Hányan olvasnak pontosan egy újságot?
- **c)** Hányan olvasnak legalább kettő újságot?
- **d)** Ha I és III reggeli újságok és II egy esti újság, akkor hányan olvasnak legalább egy reggeli újságot plusz egy esti újságot?
- **e)** Hányan olvasnak pontosan egy reggeli újságot plusz egy esti újságot?

1.8 **a)** Legyen A és B két esemény. Bizonyítsuk be, hogy

$$\text{ha } \mathbf{P}\{A\} \geq 0.8 \text{ és } \mathbf{P}\{B\} \geq 0.6, \text{ akkor } \mathbf{P}\{A \cap B\} \geq 0.4.$$

b) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eseményekre fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\mathbf{P}\{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n\} \geq \mathbf{P}\{A_1\} + \mathbf{P}\{A_2\} + \cdots + \mathbf{P}\{A_n\} - (n-1).$$

1.9 **a)** n golyót helyezünk véletlen módon k urnába. Mi a valószínűsége, hogy *pontosan* egy urna marad üres?

b) n befektetési egységet osztunk szét k részvény között. Befektetési stratégiáknak nevezzük a befektetési egységek lehetséges kiosztásait, vagyis amikor minden részvényre megadjuk, hogy abba hány egységet fektetünk be. Ha minden befektetési stratégia azonos valószínűségű, mi az esélye annak, hogy pontosan egy olyan részvény lesz, amelybe egyetlen egységet sem fektetünk be?

1.10 Egy régi vágású színházban a fogasra akasztják az érkező urak a kalapjaikat. Kifelé menet minden úr véletlenszerűen levesz egy kalapot a fogasról, és távozik. Mi annak a valószínűsége, hogy senki nem megy haza a saját kalapjában? Hogyan viselkedig ez a valószínűség aszimptotikusan amint $n \to \infty$?

1.11 •• Válasszuk ki véletlenszerűen egy 10×10-es mátrix 10 különböző elemét. Mi a valószínűsége, hogy ennek a 10 elemnek a szorzatát figyelembe kell vennünk a mátrix determinánsának kiszámításánál? (Emlékeztető lineáris algebrából: akkor és csak akkor kell figyelembe venni ezt a szorzatot, ha minden sorból és minden oszlopból egy elemet választottunk.)

1.12 **a)** Hatszor feldobunk egy szabályos dobókockát. Mi a valószínűsége, hogy az $1, 2, ..., 6$ eredmények mindegyike előfordul?

b) Tízszer feldobunk egy szabályos dobókockát. Mi a valószínűsége, hogy az $1, 2, ..., 6$ eredmények mindegyike (legalább egyszer) előfordul?

1.13 Gombóc Artúr a hét öt munkanapjára vásárolt magának 45 csokoládé szeletet, 9 különböző ízesítésben (mogyorós, narancsos, ... , karamellás), midegyik fajtából pontosan ötöt. Artúr kissé mohó, és már hétfőn elfogyaszt a 45 szeletből 15-öt, véletlenszerűen kiválasztva. Mi a valószínűsége, hogy

- **a)** • mind az öt mogyorós szeletet már hétfőn megeszi?
- **b)** •• a 9 különböző fajta egyikére sem igaz, hogy abból mind az öt szeletet már hétfőn megeszi? (Azaz: nem eszi meg hétfőn sem az öt mogyorósat, sem az öt narancsosat ... sem az öt karamellását?)

1.14 Egy közösségben 20 család van: 5 családban egy gyerek van, 7 családban kettő, 4 családban három, 3 családban négy, 1 családban öt.

- **a)** Ha egy családot véletlenszerűen kiválasztunk, mi a valószínűsége, hogy abban a családban i gyerek van, $i = 1, 2, 3, 4, 5$?
- **b)** Ha egy gyereket véletlenszerűen kiválasztunk, mi a valószínűsége, hogy ő egy i gyerekes családból jött, $i = 1, 2, 3, 4, 5$?

1.15 Egy erdőben 18 őz lakik, közülük 5 meg van jelölve. Ha véletlenszerűen 4-et befognak, mi a valószínűsége, hogy a befogottak közül pontosan 2 megjelölt lesz?

1.16 Számoljuk ki a poker különböző értékelhető konfigurációinak valószínűségeit. Azaz 52 lapos francia kártyából ($\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,$ véletlenszerűen kiválasztunk ötöt. Mi annak a valószínűsége, hogy egy párunk, két párunk, drillünk, sorunk, flush-ünk, fullunk, pókerünk, színsorunk, royal flush-ünk van?

1.17 A bridzsben az 52 lapos fracia kártyából minden játékos 13–13 lapot kap. Mi a valószínűsége annak, hogy Északnak és Délnek *együttesen* k db ásza van ($k = 0, 1, 2, 3, 4$)?

1.18 Egy kisvárosban pontosan négy TV-szerelő dolgozik. Egy napon négyen hívnak szerelőt. Mi a valószínűsége, hogy pontosan i szerelő kap hívást $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$?

1.19 Egy kisvárosban n TV-szerelő dolgozik. Egy napon k helyre hívnak szerelőt. Mi a valószínűsége, hogy pontosan i szerelő kap hívást $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$?

Bónusz: Jelölje f_n azt a számot, ahány n hosszú fej-írás sorozat van úgy, hogy nincs bennük egymás utáni két fej. Jelölje P_n ennek az eseménynek a valószínűségét szabályos érmedobás esetén.

a) Mutassuk meg, hogy $n \geq 2$-re $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, ahol $f_0 = 1, f_1 = 2$. (Hány ilyen sorozat indul fejjel, és hány írással?)

b) Határozzuk meg P_n-t f_n segítségével, és ezek alapján számoljuk ki P_{10} értékét.

c) Mutassuk meg, hogy $\lim_{n\to\infty} P_n = 0$ és határozzuk meg a $\lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{P_{n-1}}$ határértéket.

1.20 Egy urnában van 6 piros, 6 fehér, és 7 kék golyó. Ötöt visszatevés nélkül húzva mi a valószínűsége, hogy mindhárom színű golyót húztunk?

1.21 Anna, Bori és Cili egyforma erejű pingpongjátékosok. A következő módon játszanak: Anna és Bori mérik először össze az erejüket. Ezután a vesztes kiáll, és a várakozó Cili áll be a helyére, hogy összemérje tudását az előző nyertessel… Minden egyes meccs után a vesztes átadja a helyét a várakozónak. Ezt mindaddig folytatják, amíg nem nyer valamelyikük kétszer egymás után, ő lesz a körmérkőzés győztese. Írjuk le a körmérkőzés eseményterét. Az n páros csata után véget érő sorozatok valószínűsége legyen 2^{-n}. (Miért?) Mi a valószínűsége annak, hogy Anna, ill. Bori, ill. Cili nyeri a körmérkőzést?

1.22 •• Anna, Bori, Cili és Dóri érmét dobálnak, felváltva egymás után, Anna kezd, majd Bori dob, aztán Cili, utána Dóri, majd megint Anna, és így tovább. Ezt mindaddig folytatják, míg valaki fejet nem dob.

a) Írjuk le az eseményteret!

b) Írjuk le az alábbi eseményeket az eseménytéren: $A = \{$ Anna nyer $\}, C = \{$ Cili nyer $\}$, $(A \bigcup C)^c$!

1.23 A lóversenyen 7 ló indul. Jelölje C azt az eseményt, hogy Csillag az első három hely valamelyikén ér be, R pedig azt, hogy Ráró a 2. helyen végez. Mennyi $C \bigcup R$ valószínűsége? Hány elemi eseményt tartalmaz $C \bigcup R$?

1.24 Kiosztunk egy pakli jól megkevert francia kártyát. Mi a valószínűsége, hogy

a) a pikk ász a 14. kiosztott lap?

b) az első kiosztott ász a 14.-ként kiosztott lap?

c) az első négy lap különböző színű?

d) az első négy lap különböző figurájú?

1.25 Van két kockánk, amelyeket azonos módon színeztünk ki: két lapot pirosra, kettőt zöldre, egyet pedig sárgára, a maradék fehér. Ha feldobjuk őket egyszerre, mi a valószínűsége, hogy ugyanolyan színűre esnek? Mi a valószínűsége annak, hogy az első két feldobásra különböző színűek lesznek, majd harmadszorra ugyanolyanok?

1.26 •• András, Béla és Csaba két dobókockával (egy piros és egy sárga dobókockával) játszanak. Ha a piros kockán nagyobb szám áll, mint a sárgán, András nyer, ha a sárga kockán nagyobb szám áll, mint a piroson, Béla nyer, ha a két kockán azonos szám áll, Csaba nyer. 10-szer dobnak (minden alkalommal a két kockával egyszerre). Mi a valószínűsége, hogy mindhárman nyernek legalább egyszer?

1.27 • 6 férfit és 6 nőt véletlenszerűen két azonos létszámú csoportba osztunk. Mi a valószínűsége, hogy a két csoportban 3–3 nő, illetve férfi lesz?

1.28 Van 10 mentolos és 10 citromos cukorkánk, ezt a 20 cukrot véletlenszerűen elosztjuk Anna és Bea között. Ha mindkét lány 10 cukrot kap, mi a valószínűsége, hogy

a) mind a 10 mentolos cukrot Anna kapja?

b) mindkét lány pontosan 5 mentolos és pontosan 5 citromos cukrot kap?

1.29 Egy szekrényben n pár cipő van. Véletlenszerűen kiválasztunk $2r$ cipőt ($2r \leq n$). Mi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott cipők között

a) nincsen teljes pár,

b) pontosan egy teljes pár van,

c) pontosan két teljes pár van?

1.30 A bridzs játékban a négy, égtájakkal azonosított játékos mindegyikének 13 lapot osztanak ki egy 52 lapos francia kártyából. Számoljuk ki annak valószínűségét, hogy egy bridzsleosztásban Északnak semmilyen értékből se legyen meg mind a négy kártyája (azaz ne legyen se négy 2-e, se négy 3-a,...., se négy K-a, se négy A-a).