4. Feladatsor

I. Valószínűségi változó, valószínűségeloszlások, eloszlásfüggvény

1. Az A, B állandók mely értékeire lesz az F függvény egy X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, ha
 a) F(x) = A + B arctg x   ha x tetszőleges valós szám
 b) F(x) = A +B/(x+1), ha x≥1 , F(x) = 0 egyébként

2. A ξ valószínűségi változó valószínűség-eloszlása a következő:

x_i:	-1	0	1	2
$P(\xi = x_i)$	1/4	1/8	1/8	1/2

a.) Adja meg az eloszlásfüggvényét!
b.)Adja meg $\eta = \xi^2 - 2\xi + 3$ valószínűség-eloszlását, eloszlásfüggvényét!

3. Legyen az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye:
 $F(x) = 0$, ha $x \le -1$;
 $F(x) = 1/4$, ha $-1 < x \le 0$;
 $F(x) = 1/3$, ha $0 < x \le 1$;
 $F(x) = 5/6$, ha $1 < x \le 2$;
 $F(x) = 1$, ha $2 < x$.
Adjuk meg a X valószínűségeloszlását!

4. Diszkrét valószínűségi változó valószínűségeloszlása a következő:
$P(\vartheta = -1) = \frac{1}{5}$, $P(\vartheta = 0) = \frac{2}{5}$, $P(\vartheta = 1) = \frac{2}{5}$.
a.) Adja meg az eloszlásfüggvényét!
b.) Határozza meg eloszlását a $\xi = \vartheta^2$ valószínűségi változónak!

5. Egy valószínűségi változó F(x) eloszlásfüggvénye:

F(x)=0	ha	x≤-1
F(x)=1/5	ha	-1<x≤0
F(x)=(x+1)/4	ha	0<x≤1
F(x)=2/3	ha	1<x≤3
F(x)=10/12	ha	3<x≤4
F(x)=1	ha	4<x

Adja meg a következő valószínűségeket!

$P(\xi > 3)$, $P(\xi = -1)$, $P(\xi \le 1)$, $P(2 < \xi \le 4)$.

6. Egy kazán termométerén leolvasott hőmérséklet ingadozása olyan valószínűségi változó, amelynek eloszlásfüggvénye:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & ha \quad x \le 800^\circ C \\ 0{,}1x-80 & ha \quad 800^\circ C < x \le 810^\circ C \\ 1 & ha \quad 810^\circ C < x \end{cases}$$

a.) Ha a folyamatra vonatkozó előírás olyan, hogy a hőmérsékletnek 802 és 808 ºC között kell lenni, akkor mi a valószínűsége annak, hogy a hőmérséklet nem megfelelő?
b.) Mi lesz a leolvasott hőmérséklet várható értéke?

II. Sűrűségfüggvény

7. Legyen a ξ sűrűségfüggvénye:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{3}{4}x(2-x) & ha \quad 0 \le x \le 2 \\ 0 & különben \end{cases}$$

a.) Határozza meg a változó várható értékét!

8. Egy vezetőbevonat vastagsága olyan valószínűségi változó, amelynek sűrűségfüggvénye:

$f(x)=600x^{-2}, ha \; 100\mu m < x < 120\mu m$

különben 0.

a.) Adja meg az eloszlásfüggvényt!

b.) Számolja ki a várható értéket!

9. Egy oktató úgy tartja az előadását, hogy a vége előtt soha nem fejezi be, de két percnél többet soha nem vesz el a szünetből. A ξ valószínűségi változó jelentse azt, hogy egy adott napon hány perccel tartja tovább az előadást. A változó eloszlása az alábbi sűrűségfüggvénnyel jellemezhető:

$$f(x)=\begin{cases} kx^2 & ha \quad 0 \le x \le 2 \\ 0 & különben \end{cases}$$

a.) Határozza meg k paraméter értékét!

b.) Mi a valószínűsége, hogy a következő előadás alkalmával a csúszás nem lesz több 1 percnél?

c.) Mi a valószínűsége, hogy a szünet legalább 1,5 perccel rövidebb lesz?

10. Legyen X sűrűségfüggvénye a következő:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{4}(2+x) & ha \quad -A < x < 0 \\ \frac{1}{4}(2-x) & ha \quad 0 \le x \le A \\ 0 & különben \end{cases}$$

a) Határozza meg az A értékét!

b) Írja fel a valószínűségi változó eloszlásfüggvényét!

c) Ábrázolja a sűrűség- és eloszlásfüggvényt!
d.) Mi a valószínűsége annak, hogy X > 1 ?

11. Tegyük fel, hogy egy szennyező részecske mérete olyan valószínűségi változó, amelynek sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^{-3} & ha \quad x > 1 \\ 0 & különben \end{cases}$$

(Mikrométerben)

a.) Igazolja, hogy f(x) valóban sűrűségfüggvény!
b.) Adja meg az eloszlásfüggvényét!
c.) Határozza meg a várható értékét!
d.) Mi annak a valószínűsége, hogy egy részecske mérete kisebb, mint 5 mikrométer?
e.) Optikai úton akkor lehet kimutatni a szennyeződést, ha a részecske mérete nagyobb, mint 7 mikrométer. A részecskék hány %-a mutatható ki optikai úton?

12. Egy valószínűségi változó sűrűségfüggvénye a következő:

$$f(x) = \begin{cases} cx+3 & ha \quad -3 \le x \le -2 \\ 3-cx & ha \quad 2 \le x \le 3 \\ 0 & különben \end{cases}$$

a.) Adja meg a c paraméter értékét!
b.) Határozza meg a változó eloszlásfüggvényét!

Útmutató, megoldások, eredmények

Szükséges fogalmak, összefüggések: eloszlásfüggvény, sűrűségfüggvény és tulajdonságaik. A különböző események valószínűségének meghatározása az eloszlásfüggvény segítségével (előadás!). Várható érték és tulajdonságai. Sok esetben segít, ha felrajzolja a függvényeket. A számolást feltétlenül fejezze be ott, ahol a végeredmény nincs megadva!

1.) Az eloszlásfüggvény ismert tulajdonságait felhasználva:
a.) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ és $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ összefüggések alapján felírt egyenletrendszerből A=1/2, B=1/π.

b.) Mivel F(x) minden pontban legalább balról folytonos, ezért $\lim_{x\to 1(-)} F(x) = F(1)$, valamint $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ összefüggésből számítható, hogy A=1, B=-2. A fent már megadott összefüggések alapján P(10 ≤ X ≤ 14)=F(14)+P(X=14)-F(10) és P(0,3 ≤ X ≤4)=F(4)+P(X=4)-F(0,3). Fejezze be a számolást!
2.) a.) definíció $\forall x \in R$ esetén $F(x) = P(\xi < x)$
b.) Adjuk meg az új, transzformált valószínűségi változó valószínűségeloszlását! Először határozzuk meg a változó lehetséges értékekeit: $\eta(-1) = 6$, $\eta(0) = 3$ $\eta(1) = 2$ $\eta(2) = 3$. Vagyis a 3 értéket kétszer veszi fel akkor is, ha a másik változó értéke 0 és akkor is, ha 2.

Így $P(\eta = 3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$. Fejezze be a feladatot!

3.) Az eloszlásfüggvény minden részintervallumon konstans, lépcsős függvény, tehát diszkrét valószínűségi változóról van szó. A lépcsők magassága adja meg a ponthoz tartozó valószínűséget, vagyis $P(X = x_0) = \lim_{x \to x_0(+)} F(x) - F(x_0)$, valamint az $\{X \geq a\} = \overline{\{X < a\}}$ összefüggés szükséges.

Számolja ki a keresett valószínűségeket a megadott összefüggések alapján!

a.) $F(0.5)$ definíció értelmében. b.) $F(1) + P(X = 1) - F(-0{,}5)$.

c.) $1 - F(1) + P(X = 1)$. d.) $F(2) - F(0) - P(X = 0)$. Rajzolja fel a függvényt!

6.) a.) Az eloszlásfüggvény ismeretében: $P(802 \leq \xi < 808) = F(808) - F(802) = 0{,}6$. A kérdés az ellentett esemény valószínűsége. Tehát 0,6 annak a valószínűsége, hogy a hőmérséklet nem megfelelő.

b.) A várható értékhez meg kell határozni a sűrűségfüggvényt. Az $F'(x) = f(x)$ összefüggés alapján:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}1 & ha \quad 800 < x < 810 \\ 0 & különben \end{cases}$$

Így a várhatóértéke az $M(\xi) = \int_{800}^{810} x \cdot 0{,}1 dx$ összefüggésből számolható. Fejezze be a számolást!

Milyen eloszlás ez valójában?

7.) $M(\xi) = \int_0^2 x \frac{3}{4} x(2 - x) dx$ és a $M(\xi^2) = \int_0^2 x^2 \frac{3}{4} x(2 - x) dx$ integrálok értékét kell meghatározni. Számolja ki! Határozza meg az eloszlásfüggvényt is!

9.) Jelölje X a valószínűségi változót!

a.) A sűrűségfüggvény ismert tulajdonságai alapján az $\int_0^2 kx^2 dx = 1$ egyenletet kell megoldani.

Ebből $k = \frac{3}{8}$ adódik.

b.) $P(0 \leq X < 1) = \int_0^1 \frac{3}{8} x^2 dx = \frac{1}{8}$ a keresett valószínűség.

c.) Ha szünet legalább 1,5 perccel rövidebb, akkor legalább 1,5 percnél hosszabb a csúszás.

tehát $P(1{,}5 \leq X) = \int_{1{,}5}^2 \frac{3}{8} x^2 dx =$ képlettel számolható. Fejezze be a számolást!

10.) *Készítsen rajzot a sűrűségfüggvényről. Jelölje meg az x-tengelyen azokat a pontokat, ahol a sűrűségfüggvény definíciója megváltozik (a szakadási pontokat). Ez segít megérteni, elképzelni, hogy mely intervallumokon kell különböző formulákkal, vagy konstans értékkel meghatározni az eloszlásfüggvényt.*

a.) Az A értékét az $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ összefüggésből határozzuk meg. Ez most az

$\int_{-A}^{0} \frac{1}{4}(2+x)dx + \int_{0}^{A} \frac{1}{4}(2-x)dx = 1$ egyenlet megoldását jelenti. Ebből A=2 adódik. Számolja végig!

b.) A folytonos valószínűségi változó definíciója szerint az eloszlásfüggvény:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad ha \quad x \le -2 \\ \int_{-2}^{x} \frac{1}{4}(2+t)dt = \frac{1}{4}\left(2x + \frac{x^2}{2} + 2\right) ha \quad -2 < x \le 0 \\ \int_{-2}^{0} \frac{1}{4}(2+t)dt + \int_{0}^{x} \frac{1}{4}(2-t)dt = \frac{1}{2} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \quad ha \quad 0 < x \le 2 \\ 1 \quad ha \quad x > 2 \end{cases}$$

Rajzolja fel a függvényt!

c.) Mivel az eloszlásfüggvény már ismert, ezért egyszerűbb annak alkalmazásával meghatározni a keresett valószínűséget. $P(X > 1) = 1 - F(1) = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right)$. Számolja ki a sűrűségfüggvény segítségével is. (Vigyázzon a határokkal!)

11.) a.) Be kell látni, hogy $f(x) \ge 0$ mindenhol és a görbe alatti terület egységnyi, azaz $\int_{1}^{\infty} 2x^{-3}dx = 1$

b.) A folytonos valószínűségi változó definícióját, illetve az eloszlásfüggvény és a sűrűségfüggvény közötti kapcsolatot felhasználva:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad ha \quad x \le 1 \\ \int_{1}^{x} 2t^{-3}dt = 1 - x^{-2} \quad ha \quad x > 1 \end{cases}$$

c.) $M(\xi) = \int_{1}^{\infty} x 2x^{-3}dx$ impropius integrált kell meghatározni. Ha ez létezik (konvergens), akkor létezik a várható érték. A szórásnégyzet létezéséhez a $M(\xi^2) = \int_{1}^{\infty} x^2 2x^{-3}dx$ az integrálnak (második momentumnak) is léteznie kell.

Az $\int_{1}^{\infty} \frac{2}{x}dx = \lim_{R \to \infty} [\ln(x)]_1^R$ nem konvergens, tehát nem létezik a szórásnégyzet.

d.) $P(\xi < 5) = \int_{1}^{5} 2x^{-3}dx$. Végezze el a számolást!

e.) $P(\xi > 7) = \int_{7}^{\infty} 2x^{-3}dx = 1 - \int_{1}^{7} 2x^{-3}dx$. Végezze el a számolást!

12.) Készítsen ábrát. Ebben a feladatban különösen figyelni kell arra, hogy mely intervallumokból vesz fel a változó értékeket.

a.) $\int_{-3}^{-2} (cx+3)dx + \int_{2}^{3} (3-cx)dx = 1$ összefüggést kell használni. Ebből az adódik, hogy c=1.

b.) $$F(x)=\begin{cases} 0 \quad ha \quad x \le -3 \\ \int_{-3}^{x} (t+3)dt \quad ha \quad -3 < x \le -2 \\ \frac{1}{2} \quad ha \quad -2 < x \le 2 \\ \frac{1}{2} + \int_{2}^{x} (3-t)dt \quad ha \quad 2 < x \le 3 \\ 1 \quad ha \quad x > 3 \end{cases}$$

Rajzolja fel a függvényt. Fejezze be a számításokat!