Nevezetes Eloszlások I. — Diszkrét Eloszlások

dr. Farkas Lóránt Ernő

2020 tavasz

Mit vettünk eddig?

A félév során megismerkedtünk már a

- valószínűségi mezővel,

Mit vettünk eddig?

A félév során megismerkedtünk már a

- valószínűségi mezővel,
- klasszikus valószínűséggel,

Mit vettünk eddig?

A félév során megismerkedtünk már a

- valószínűségi mezővel,
- klasszikus valószínűséggel,
- események algebrájával,

Mit vettünk eddig?

A félév során megismerkedtünk már a

- valószínűségi mezővel,
- klasszikus valószínűséggel,
- események algebrájával,
- feltételes valószínűséggel, függetlenséggel.

Mit vettünk eddig?

A félév során megismerkedtünk már a

- valószínűségi mezővel,
- klasszikus valószínűséggel,
- események algebrájával,
- feltételes valószínűséggel, függetlenséggel.
- Valószínűségi változókkal,

Mit vettünk eddig?

A félév során megismerkedtünk már a

- valószínűségi mezővel,
- klasszikus valószínűséggel,
- események algebrájával,
- feltételes valószínűséggel, függetlenséggel.
- Valószínűségi változókkal,
- azok eloszásával, eloszlás és sűrűségfüggévnyével,

Mit vettünk eddig?

A félév során megismerkedtünk már a

- valószínűségi mezővel,
- klasszikus valószínűséggel,
- események algebrájával,
- feltételes valószínűséggel, függetlenséggel.
- Valószínűségi változókkal,
- azok eloszásával, eloszlás és sűrűségfüggévnyével,
- várható értékükkel, szórásukkal.

Nevezetes eloszlások

A valószínűségi változók fajtái alapján a nevezetes eloszlású valószínűségi változó lehet:

Nevezetes eloszlások

A valószínűségi változók fajtái alapján a nevezetes eloszlású valószínűségi változó lehet:

Diszkrét

Nevezetes eloszlások

A valószínűségi változók fajtái alapján a nevezetes eloszlású valószínűségi változó lehet:

Diszkrét

Abszolult folytonos

Nevezetes eloszlások

A valószínűségi változók fajtái alapján a nevezetes eloszlású valószínűségi változó lehet:

Diszkrét

- Binomiális

Abszolult folytonos

Nevezetes eloszlások

A valószínűségi változók fajtái alapján a nevezetes eloszlású valószínűségi változó lehet:

Diszkrét

- Binomiális
- Geometriai

Abszolult folytonos

Nevezetes eloszlások

A valószínűségi változók fajtái alapján a nevezetes eloszlású valószínűségi változó lehet:

Diszkrét

- Binomiális
- Geometriai
- Poisson

Abszolult folytonos

Nevezetes eloszlások

A valószínűségi változók fajtái alapján a nevezetes eloszlású valószínűségi változó lehet:

Diszkrét

- Binomiális
- Geometriai
- Poisson

Abszolult folytonos

- Exponenciális

Nevezetes eloszlások

A valószínűségi változók fajtái alapján a nevezetes eloszlású valószínűségi változó lehet:

Diszkrét

- Binomiális
- Geometriai
- Poisson

Abszolult folytonos

- Exponenciális
- Egyenletes

Nevezetes eloszlások

A valószínűségi változók fajtái alapján a nevezetes eloszlású valószínűségi változó lehet:

Diszkrét

- Binomiális
- Geometriai
- Poisson

Abszolult folytonos

- Exponenciális
- Egyenletes
- Normális

Mikor használunk binomiális eloszlást?

Definíció: n darab véletlen kísérleteket végzek mindegyik a többitől függetlenül p valószínűséggel sikeres.

Mikor használunk binomiális eloszlást?

Definíció: n darab véletlen kísérleteket végzek mindegyik a többitől függetlenül p valószínűséggel sikeres.

Legyen X = a sikeres kísérletek száma. Ekkor X eloszlása binomiális eloszlású n, p paraméterekkel.

Mikor használunk binomiális eloszlást?

Definíció: n darab véletlen kísérleteket végzek mindegyik a többitől függetlenül p valószínűséggel sikeres.

Legyen $X =$ a sikeres kísérletek száma. Ekkor X eloszlása binomiális eloszlású n, p paraméterekkel.

Jelölése: $X \sim Bin(n, p)$

Mikor használunk binomiális eloszlást?

Definíció: n darab véletlen kísérleteket végzek mindegyik a többitől függetlenül p valószínűséggel sikeres.

Legyen $X =$ a sikeres kísérletek száma. Ekkor X eloszlása binomiális eloszlású n, p paraméterekkel.

Jelölése: $X \sim Bin(n, p)$

Például: feldobok 10 érmét, hány lesz ebből fej, egy betegség elleni gyógyszerkísérletnél hányan gyógyulnak meg, egy processzor magján hány jó mag van.

Mikor használunk binomiális eloszlást?

Definíció: n darab véletlen kísérleteket végzek mindegyik a többitől függetlenül p valószínűséggel sikeres.

Legyen $X =$ a sikeres kísérletek száma. Ekkor X eloszlása binomiális eloszlású n, p paraméterekkel.

Jelölése: $X \sim Bin(n, p)$

Például: feldobok 10 érmét, hány lesz ebből fej, egy betegség elleni gyógyszerkísérletnél hányan gyógyulnak meg, egy processzor magján hány jó mag van.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Mikor használunk binomiális eloszlást?

Definíció: n darab véletlen kísérleteket végzek mindegyik a többitől függetlenül p valószínűséggel sikeres.

Legyen $X =$ a sikeres kísérletek száma. Ekkor X eloszlása binomiális eloszlású n, p paraméterekkel.

Jelölése: $X \sim Bin(n, p)$

Például: feldobok 10 érmét, hány lesz ebből fej, egy betegség elleni gyógyszerkísérletnél hányan gyógyulnak meg, egy processzor magján hány jó mag van.

$$\mathrm{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Be fogjuk bizonyítani, hogy:

$$\mathbb{E}(X) = np, \quad \mathbb{D}(X) = \sqrt{np(1-p)}$$

A várható érték bizonyítása

Tudjuk hogy azt kéne kiszámítani, hogy

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \mathrm{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = ??$$

A várható érték bizonyítása

Tudjuk hogy azt kéne kiszámítani, hogy

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \mathrm{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = ??$$

Legyen

$$\xi_k = \begin{cases} 1, & \text{ha a k-adik kísérlet sikeres} \\ 0, & \text{ha nem} \end{cases}$$

A várható érték bizonyítása

Tudjuk hogy azt kéne kiszámítani, hogy

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \mathrm{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = ??$$

Legyen

$$\xi_k = \begin{cases} 1, & \text{ha a k-adik kísérlet sikeres} \\ 0, & \text{ha nem} \end{cases}$$

Vegyük észre, hogy $X = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$

A várható érték bizonyítása

Tudjuk hogy azt kéne kiszámítani, hogy

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \mathrm{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = ??$$

Legyen

$$\xi_k = \begin{cases} 1, & \text{ha a k-adik kísérlet sikeres} \\ 0, & \text{ha nem} \end{cases}$$

Vegyük észre, hogy $X = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$

Mivel $\mathbb{E}(\xi_k) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$

A várható érték bizonyítása

Tudjuk hogy azt kéne kiszámítani, hogy

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \mathrm{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = ??$$

Legyen

$$\xi_k = \begin{cases} 1, & \text{ha a k-adik kísérlet sikeres} \\ 0, & \text{ha nem} \end{cases}$$

Vegyük észre, hogy $X = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$

Mivel $\mathbb{E}(\xi_k) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$

Ezért $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n) =$

A várható érték bizonyítása

Tudjuk hogy azt kéne kiszámítani, hogy

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \mathrm{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = ??$$

Legyen

$$\xi_k = \begin{cases} 1, & \text{ha a k-adik kísérlet sikeres} \\ 0, & \text{ha nem} \end{cases}$$

Vegyük észre, hogy $X = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$

Mivel $\mathbb{E}(\xi_k) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$

Ezért $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n) =$

$= \mathbb{E}(\xi_1) + \mathbb{E}(\xi_2) + \cdots + \mathbb{E}(\xi_n) = p + p + \cdots + p = np$

A várható érték bizonyítása

Tudjuk hogy azt kéne kiszámítani, hogy

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \mathrm{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np$$

Legyen

$$\xi_k = \begin{cases} 1, & \text{ha a k-adik kísérlet sikeres} \\ 0, & \text{ha nem} \end{cases}$$

Vegyük észre, hogy $X = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$

Mivel $\mathbb{E}(\xi_k) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$

Ezért $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n) =$

$= \mathbb{E}(\xi_1) + \mathbb{E}(\xi_2) + \cdots + \mathbb{E}(\xi_n) = p + p + \cdots + p = np$

A szórás bizonyítása

$$\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{D}^2(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n) = \text{(függetlenség miatt)}$$

A szórás bizonyítása

$$\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{D}^2(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n) = \text{(függetlenség miatt)}$$
$$= \mathbb{D}^2(\xi_1) + \mathbb{D}^2(\xi_2) + \cdots + \mathbb{D}^2(\xi_n) = ??$$

A szórás bizonyítása

$$\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{D}^2(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n) = \text{(függetlenség miatt)}$$
$$= \mathbb{D}^2(\xi_1) + \mathbb{D}^2(\xi_2) + \cdots + \mathbb{D}^2(\xi_n) = ??$$

Mivel $\mathbb{D}^2(\xi_k) = \mathbb{E}(\xi_k^2) - (\mathbb{E}(\xi_k))^2 = \mathbb{E}(\xi_k^2) - p^2 =$

A szórás bizonyítása

$\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{D}^2(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n) =$(függetlenség miatt)
$= \mathbb{D}^2(\xi_1) + \mathbb{D}^2(\xi_2) + \cdots + \mathbb{D}^2(\xi_n) =$??

Mivel $\mathbb{D}^2(\xi_k) = \mathbb{E}(\xi_k^2) - (\mathbb{E}(\xi_k))^2 = \mathbb{E}(\xi_k^2) - p^2 =$
$= 1^2 p + 0^2(1-p) - p^2 = p - p^2 = p(1-p)$

A szórás bizonyítása

$$\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{D}^2(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n) = \text{(függetlenség miatt)}$$
$$= \mathbb{D}^2(\xi_1) + \mathbb{D}^2(\xi_2) + \cdots + \mathbb{D}^2(\xi_n) = np(1-p)$$

Mivel $\mathbb{D}^2(\xi_k) = \mathbb{E}(\xi_k^2) - (\mathbb{E}(\xi_k))^2 = \mathbb{E}(\xi_k^2) - p^2 =$
$= 1^2 p + 0^2(1-p) - p^2 = p - p^2 = p(1-p)$

Tehát

$$\mathbb{D}(X) = \sqrt{\mathbb{D}^2(X)} = \sqrt{np(1-p)}$$

Példa binomiális eloszlásra

Példa: Egy intenzív osztályon 12 ágy van. Mindegyik, a többitől függetlenül, 85% valószínűséggel foglalt. Mennyi a foglalt ágyak várható értéke, szórása? Ha egy váratlan esemény (pl. baleset vagy járvány) miatt 3 beteget el kell helyezni, akkor mi a valószínűsége, hogy ezt minden további nélkül meg tudják tenni?

Példa binomiális eloszlásra

Példa: Egy intenzív osztályon 12 ágy van. Mindegyik, a többitől függetlenül, 85% valószínűséggel foglalt. Mennyi a foglalt ágyak várható értéke, szórása? Ha egy váratlan esemény (pl. baleset vagy járvány) miatt 3 beteget el kell helyezni, akkor mi a valószínűsége, hogy ezt minden további nélkül meg tudják tenni?

Megoldás: Legyen X =foglalt ágyak száma.

Példa binomiális eloszlásra

Példa: Egy intenzív osztályon 12 ágy van. Mindegyik, a többitől függetlenül, 85% valószínűséggel foglalt. Mennyi a foglalt ágyak várható értéke, szórása? Ha egy váratlan esemény (pl. baleset vagy járvány) miatt 3 beteget el kell helyezni, akkor mi a valószínűsége, hogy ezt minden további nélkül meg tudják tenni?

Megoldás: Legyen X =foglalt ágyak száma.

Ekkor nyilván $X \sim Bin(12(= n), 0{,}85(= p))$

Példa binomiális eloszlásra

Példa: Egy intenzív osztályon 12 ágy van. Mindegyik, a többitől függetlenül, 85% valószínűséggel foglalt. Mennyi a foglalt ágyak várható értéke, szórása? Ha egy váratlan esemény (pl. baleset vagy járvány) miatt 3 beteget el kell helyezni, akkor mi a valószínűsége, hogy ezt minden további nélkül meg tudják tenni?

Megoldás: Legyen X =foglalt ágyak száma.

Ekkor nyilván $X \sim Bin(12(= n), 0{,}85(= p))$

Tehát

$$\mathbb{E}(X) = 12 \cdot 0{,}85 = 10{,}2, \quad \mathbb{D}(X) = \sqrt{12 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}15}$$

Példa binomiális eloszlásra

Példa: Egy intenzív osztályon 12 ágy van. Mindegyik, a többitől függetlenül, 85% valószínűséggel foglalt. Mennyi a foglalt ágyak várható értéke, szórása? Ha egy váratlan esemény (pl. baleset vagy járvány) miatt 3 beteget el kell helyezni, akkor mi a valószínűsége, hogy ezt minden további nélkül meg tudják tenni?

Megoldás: Legyen X =foglalt ágyak száma.

Ekkor nyilván $X \sim Bin(12(=n), 0{,}85(=p))$

Tehát

$$\mathbb{E}(X) = 12 \cdot 0{,}85 = 10{,}2, \quad \mathbb{D}(X) = \sqrt{12 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}15}$$

3 ágy szabad: $P(X \leq 9) = 1 - \mathrm{P}(X \geq 10) =$

$$= 1 - \mathrm{P}(X = 10) - \mathrm{P}(X = 11) - \mathrm{P}(X = 12) =$$

$$= 1 - \binom{12}{10} 0{,}85^{10} 0{,}15^{2} - \binom{12}{11} 0{,}85^{11} 0{,}15^{1} - \binom{12}{12} 0{,}85^{12} 0{,}15^{0}$$

Mikor használunk Geometriai eloszlást?

Definíció: Véletlen kísérleteket végzek mindegyik a többitől függetlenül p valószínűséggel sikeres.

Mikor használunk Geometriai eloszlást?

Definíció: Véletlen kísérleteket végzek mindegyik a többitől függetlenül p valószínűséggel sikeres.

Legyen $Y =$ Az első sikeres kísérlet sorszáma. Ekkor Y eloszlása geometriai eloszlású p paraméterrel, vagyis $Y \sim Geo(p)$.

Mikor használunk Geometriai eloszlást?

Definíció: Véletlen kísérleteket végzek mindegyik a többitől függetlenül p valószínűséggel sikeres.

Legyen $Y =$ Az első sikeres kísérlet sorszáma. Ekkor Y eloszlása geometriai eloszlású p paraméterrel, vagyis $Y \sim Geo(p)$.

Például: Hányszor kell játszanom a félkarú rablóval míg nyerek? Hány vegyületet kell kipróbálnom míg hatásos gyógyszert nem találok egy betegségre.

Mikor használunk Geometriai eloszlást?

Definíció: Véletlen kísérleteket végzek mindegyik a többitől függetlenül p valószínűséggel sikeres.

Legyen $Y =$ Az első sikeres kísérlet sorszáma. Ekkor Y eloszlása geometriai eloszlású p paraméterrel, vagyis $Y \sim Geo(p)$.

Például: Hányszor kell játszanom a félkarú rablóval míg nyerek? Hány vegyületet kell kipróbálnom míg hatásos gyógyszert nem találok egy betegségre.

Eloszlása:

$$P(Y = k) = (1 - p)^{k-1} p$$

Mikor használunk Geometriai eloszlást?

Definíció: Véletlen kísérleteket végzek mindegyik a többitől függetlenül p valószínűséggel sikeres.

Legyen $Y =$ Az első sikeres kísérlet sorszáma. Ekkor Y eloszlása geometriai eloszlású p paraméterrel, vagyis $Y \sim Geo(p)$.

Például: Hányszor kell játszanom a félkarú rablóval míg nyerek? Hány vegyületet kell kipróbálnom míg hatásos gyógyszert nem találok egy betegségre.

Eloszlása:

$$\mathrm{P}(Y = k) = (1-p)^{k-1}p$$

Be fogjuk bizonyítani, hogy:

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{p}, \quad \mathbb{D}(Y) = \frac{\sqrt{1-p}}{p}$$

A várható érték bizonyítása

Tudjuk hogy azt kéne kiszámítani, hogy

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \mathrm{P}(Y = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (1-p)^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k}$$

A várható érték bizonyítása

Tudjuk hogy azt kéne kiszámítani, hogy

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \mathrm{P}(Y = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (1-p)^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^k$$

Legyen $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^{k-1}$

$$f(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k \right)' = (x + x^2 + x^3 \dots)' = \left(x(1 + x + x^2 + \dots)\right)' =$$

$$= \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

A várható érték bizonyítása

Tudjuk hogy azt kéne kiszámítani, hogy

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \mathrm{P}(Y = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (1-p)^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^k$$

Legyen $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^{k-1}$

$$f(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k \right)' = (x + x^2 + x^3 \dots)' = \left(x(1 + x + x^2 + \dots)\right)' =$$

$$= \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Vegyük észre, hogy

$$\mathbb{E}(Y) = pf(1-p) = p \frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}$$

A szórás bizonyítása

$$\mathbb{D}^2(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot p(1-p)^{k-1} - \frac{1}{p^2}$$

A szórás bizonyítása

$$\mathbb{D}^2(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot p(1-p)^{k-1} - \frac{1}{p^2}$$

Legyen $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot x^{k-1}$

$$g(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^k\right)' = \left(\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)x^k - \sum_{k=1}^{\infty} x^k\right)' =$$

$$= \left(\left(\sum_{k=1}^{\infty} x^{k+1}\right)' - \sum_{k=1}^{\infty} x^k\right) = \left(\left(\frac{x^2}{1-x}\right)' - \frac{x}{1-x}\right)'$$

$$= \left(\frac{2x(1-x)+x^2}{(1-x)^2} - \frac{x}{1-x}\right)' = \left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

A szórás bizonyítása

$$\mathbb{D}^2(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot p(1-p)^{k-1} - \frac{1}{p^2}$$

Legyen $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot x^{k-1}$

$$g(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^k\right)' = \left(\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)x^k - \sum_{k=1}^{\infty} x^k\right)' =$$

$$= \left(\left(\sum_{k=1}^{\infty} x^{k+1}\right)' - \sum_{k=1}^{\infty} x^k\right) = \left(\left(\frac{x^2}{1-x}\right)' - \frac{x}{1-x}\right)'$$

$$= \left(\frac{2x(1-x)+x^2}{(1-x)^2} - \frac{x}{1-x}\right)' = \left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

Ebből $\mathbb{D}^2(Y) = pg(1-p) - \frac{1}{p^2} = p\frac{2-p}{p^3} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$

Példa a geometriai eloszlásra

Példa: Egy urnában van 10 piros és 3 kék golyó, amiből visszatevéssel húzunk addig, amíg kéket nem húzunk. Mi a húzások számának várható értéke és szórása? Mi a valószínűsége, hogy 4 vagy ennél kevesebb húzással kéket húzok? Mi a valószínűsége, hogy 5 vagy ennél több húzás kell?

Példa a geometriai eloszlásra

Példa: Egy urnában van 10 piros és 3 kék golyó, amiből visszatevéssel húzunk addig, amíg kéket nem húzunk. Mi a húzások számának várható értéke és szórása? Mi a valószínűsége, hogy 4 vagy ennél kevesebb húzással kéket húzok? Mi a valószínűsége, hogy 5 vagy ennél több húzás kell?

Megoldás: Legyen $H =$ húzások száma. Világos hogy $H \sim Geo\left(\frac{3}{13}\right)$. Így $\mathbb{E}(H) = \frac{13}{3}$, $\mathbb{D}(X) = \frac{\sqrt{1-\frac{3}{13}}}{\frac{3}{13}} = \frac{\sqrt{130}}{3}$

Példa a geometriai eloszlásra

Példa: Egy urnában van 10 piros és 3 kék golyó, amiből visszatevéssel húzunk addig, amíg kéket nem húzunk. Mi a húzások számának várható értéke és szórása? Mi a valószínűsége, hogy 4 vagy ennél kevesebb húzással kéket húzok? Mi a valószínűsége, hogy 5 vagy ennél több húzás kell?

Megoldás: Legyen $H =$ húzások száma. Világos hogy $H \sim Geo\left(\frac{3}{13}\right)$. Így $\mathbb{E}(H) = \frac{13}{3}$, $\mathbb{D}(X) = \frac{\sqrt{1-\frac{3}{13}}}{\frac{3}{13}} = \frac{\sqrt{130}}{3}$

Az hogy 4 vagy ennél kevesebből húzok kéket: Legyen $q = 1 - p = \frac{10}{13}$

$$\mathrm{P}(X \leq 4) = p + pq + pq^2 + pq^3 = p(1 + q + q^2 + q^3)) =$$

$$= p\frac{1-q^4}{1-q} = 1 - \left(\frac{10}{13}\right)^4$$

Példa a geometriai eloszlásra, megoldás

Utolsó kérdés: Mi a valószínűsége, hogy 5 vagy ennél több húzás kell?

Példa a geometriai eloszlásra, megoldás

Utolsó kérdés: Mi a valószínűsége, hogy 5 vagy ennél több húzás kell?

Megoldás: Nyilván modhatjuk, hogy:

$$\mathrm{P}(H \geq 5) = 1 - \mathrm{P}(H \leq 4) = \left(\frac{10}{13}\right)^4$$

Példa a geometriai eloszlásra, megoldás

Utolsó kérdés: Mi a valószínűsége, hogy 5 vagy ennél több húzás kell?

Megoldás: Nyilván modhatjuk, hogy:

$$\mathrm{P}(H \geq 5) = 1 - \mathrm{P}(H \leq 4) = \left(\frac{10}{13}\right)^4$$

másik megoldás:

$$\mathrm{P}(X \geq 5) = \sum_{k=5}^{\infty} pq^{k-1} = p(q^4 + q^5 + q^6 + \dots) =$$

$$= pq^4(1 + q + q^2 + \dots) = q^4 p \frac{1}{1-q} = q^4$$

Mikor használunk Poisson eloszlást?

Amikor binomiálist használnák, de n nagy $n \to \infty$, p kicsi $p \to 0$, de a várható érték állandó $np = \lambda$

Mikor használunk Poisson eloszlást?

Amikor binomiálist használnák, de n nagy $n \to \infty$, p kicsi $p \to 0$, de a várható érték állandó $np = \lambda$

Például: Budapesten a heti tűzesetek száma (sok helyen lehet tűz, de a valószínűsége kicsi). Egy méter szövetanyagban a hibák átlagos száma (sok helyen lehet hiba, de a valószínűség kicsi). Egy webszerveren a percenkénti lekérdezések száma (sok lekérdezés van de kicsi a valószínűsége, hogy pont ezt a szervert kérdezik).

Mikor használunk Poisson eloszlást?

Amikor binomiálist használnák, de n nagy $n \to \infty$, p kicsi $p \to 0$, de a várható érték állandó $np = \lambda$

Például: Budapesten a heti tűzesetek száma (sok helyen lehet tűz, de a valószínűsége kicsi). Egy méter szövetanyagban a hibák átlagos száma (sok helyen lehet hiba, de a valószínűség kicsi). Egy webszerveren a percenkénti lekérdezések száma (sok lekérdezés van de kicsi a valószínűsége, hogy pont ezt a szervert kérdezik).

Legyen $X \sim Bin(n, p)$ úgy, hogy $n \to \infty$, $p \to 0$, de $np = \lambda$. Ekkor $p = \frac{\lambda}{n}$

Mikor használunk Poisson eloszlást?

Amikor binomiálist használnák, de n nagy $n \to \infty$, p kicsi $p \to 0$, de a várható érték állandó $np = \lambda$

Például: Budapesten a heti tűzesetek száma (sok helyen lehet tűz, de a valószínűsége kicsi). Egy méter szövetanyagban a hibák átlagos száma (sok helyen lehet hiba, de a valószínűség kicsi). Egy webszerveren a percenkénti lekérdezések száma (sok lekérdezés van de kicsi a valószínűsége, hogy pont ezt a szervert kérdezik).

Legyen $X \sim Bin(n, p)$ úgy, hogy $n \to \infty$, $p \to 0$, de $np = \lambda$. Ekkor $p = \frac{\lambda}{n}$

Az világos hogy

$$\mathbb{E}(X) = \lim_{n\to\infty} n\frac{\lambda}{n} = \lambda, \quad \mathbb{D}(X) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n\frac{\lambda}{n}\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)} = \sqrt{\lambda}$$

Poisson eloszlás képlete

Eloszlása: Legyen $X \sim Bin(n, p)$ úgy, hogy $n \to \infty$, és $p = \frac{\lambda}{n}$.

Poisson eloszlás képlete

Eloszlása: Legyen $X \sim Bin(n, p)$ úgy, hogy $n \to \infty$, és $p = \frac{\lambda}{n}$.

Ekkor:

$$P(X = k) = \lim_{n \to 0} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \frac{\lambda^k}{n^k} \frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \lim_{n \to \infty} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Példa Poisson eloszlásra

Példa: A netflixen egy sorozatot percenként átlagosan 2-en néznek meg. Egy kis hiba miatt a film 3 percig nem volt elérhető. Mennyi azon előfizetők számának várható értéke akik emiatt a malőr miatt panaszt tehetnek? Mi a valószínűsége, hogy a felhasználók észre sem veszik az esetet? Indokolja a használt eloszlás jogosságát!

Példa Poisson eloszlásra

Példa: A netflixen egy sorozatot percenként átlagosan 2-en néznek meg. Egy kis hiba miatt a film 3 percig nem volt elérhető. Mennyi azon előfizetők számának várható értéke akik emiatt a malőr miatt panaszt tehetnek? Mi a valószínűsége, hogy a felhasználók észre sem veszik az esetet? Indokolja a használt eloszlás jogosságát!

Megoldás: Legyen N =Azok száma akik belefutottak a hibába.

Példa Poisson eloszlásra

Példa: A netflixen egy sorozatot percenként átlagosan 2-en néznek meg. Egy kis hiba miatt a film 3 percig nem volt elérhető. Mennyi azon előfizetők számának várható értéke akik emiatt a malőr miatt panaszt tehetnek? Mi a valószínűsége, hogy a felhasználók észre sem veszik az esetet? Indokolja a használt eloszlás jogosságát!

Megoldás: Legyen N =Azok száma akik belefutottak a hibába.

$N \sim Poi(6)$ hiszen 1 perc alatt a várható érték 2 akkor 3 perc alatt a várható érték 6.

Példa Poisson eloszlásra

Példa: A netflixen egy sorozatot percenként átlagosan 2-en néznek meg. Egy kis hiba miatt a film 3 percig nem volt elérhető. Mennyi azon előfizetők számának várható értéke akik emiatt a malőr miatt panaszt tehetnek? Mi a valószínűsége, hogy a felhasználók észre sem veszik az esetet? Indokolja a használt eloszlás jogosságát!

Megoldás: Legyen N =Azok száma akik belefutottak a hibába.

$N \sim Poi(6)$ hiszen 1 perc alatt a várható érték 2 akkor 3 perc alatt a várható érték 6.

Poissont kell használni, hiszen sok előfizető van, de kis valószínűséggel fog valaki pont erre a sorozatra kattintani.

Példa Poisson eloszlásra

Példa: A netflixen egy sorozatot percenként átlagosan 2-en néznek meg. Egy kis hiba miatt a film 3 percig nem volt elérhető. Mennyi azon előfizetők számának várható értéke akik emiatt a malőr miatt panaszt tehetnek? Mi a valószínűsége, hogy a felhasználók észre sem veszik az esetet? Indokolja a használt eloszlás jogosságát!

Megoldás: Legyen $N =$Azok száma akik belefutottak a hibába.

$N \sim Poi(6)$ hiszen 1 perc alatt a várható érték 2 akkor 3 perc alatt a várható érték 6.

Poissont kell használni, hiszen sok előfizető van, de kis valószínűséggel fog valaki pont erre a sorozatra kattintani.

Annak a valószínűsége, hogy észre sem veszik:

$$\mathrm{P}(N < 1) = \mathrm{P}(N = 0) = \frac{\lambda^0}{0!}\,\mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-6} = 0{,}0024$$

A Poisson eloszlás egy fontos tulajdonsága

Tétel

Ha $X \sim Poi(\lambda)$ *és* $Y \sim Poi(\mu)$ *akkor* $X + Y \sim Poi(\lambda + \mu)$

A Poisson eloszlás egy fontos tulajdonsága

Tétel

Ha $X \sim Poi(\lambda)$ és $Y \sim Poi(\mu)$ akkor $X + Y \sim Poi(\lambda + \mu)$

Bizonyítás:

$$\begin{aligned} P(X+Y=n) &= \sum_{k=0}^{n} P(X=k)P(Y=n-k) = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\mu} = \\ &= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \lambda^k \mu^{n-k} = e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!} \end{aligned}$$

Példa a fenti tulajdonságra

Példa: Egy mentő állomáshoz a nappali órákban (7-19) óránként átlag 2 hívás fut be. Az éjszakai órákban (19-7) óránként átlag fél. Milyen eloszlású a naponta bejövő hívások száma?

Példa a fenti tulajdonságra

Példa: Egy mentő állomáshoz a nappali órákban (7-19) óránként átlag 2 hívás fut be. Az éjszakai órákban (19-7) óránként átlag fél. Milyen eloszlású a naponta bejövő hívások száma?

Megoldás: Poissont kell használni, hiszen sok hívás van, de kis valószínűséggel fogják pont az állomást hívni. A nappal befutó hívások átlagos száma 12*2=24, az éjszaka befutó hívások száma 12*0,5=6 így, ha B =A napi bejövő hívások száma, akkor $B \sim Poi(30)$