Szakdolgozat

Gömbök feletti komplex vektornyalábok homotópia- és kohomológia-elméletének összehasonlítása

Lovas Attila
matematikus hallgató
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Természettudományi Kar

Témavezető: Dr. Etesi Gábor
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Matematika Intézet
Geometria Tanszék

2011.tavasz

A szakdolgozat készítésének helye:
BME Matematika Intézet, Geometria Tanszék

Kivonat

A dolgozatban az algebrai topologia egy fontos problémáját: a gömbök feletti komplex vektornyalábok osztályozását tekintjük át. A szükséges matematikai háttér kiépítése után azt hasonlítjuk össze, hogy hogyan viszonyul egymáshoz a komplex vektornyalábok homotopikus, illetve kohomologikus (vagyis karakterisztikus osztályokon alapuló) osztályozása.

Témavezető: Dr. Etesi Gábor

Beosztása: Egyetemi docens, Geometria Tanszék

Záróvizsga tárgya:

A feladat kiírásának időpontja: 2011. szeptember 28.
Beadási Határidő: 2012. május 11.

A szakdolgozatot jóváhagyom:

témavezető

Önállósági nyilatkozat

Alulírott Lovas Attila matematikus hallgató kijelentem, hogy a dolgozatomat a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Matematika Intézetében készítettem matematikus BSc diploma megszerzése érdekében. Kijelentem, hogy a dolgozatot más szakon korábban nem védtem meg, saját munkám eredménye, és csak a hivatkozott forrásokat használtam fel.

Lovas Attila

Tartalomjegyzék

1. Bevezető

A dolgozatban a gömbök feletti komplex vektornyalábok osztályozásával fogunk foglalkozni. Megmutatjuk, hogy S^n felett a $\pi_{n-1}(U(k))$ homotópia csoport osztályozza az unitér vektornyalábokat. A karakterisztikus osztályok elméletének és a Chern-Weil elméletnek a rövid, bevezető jellegű ismertetése után rátérünk a gömbök feletti vektornyalábok kohomologikus osztályozására. Belátjuk, hogy az S^{2n} gömb felett a vektornyalábokat az n-edik Chern osztályok osztályozzák. Végül kitekintésképpen utalást teszünk a Hirzebruch-Bott tételre, amely a vektornyalábok homotopikus és a kohomologikus osztályozása között fennálló diszkrepanciára világít rá.

A lényeges különbség a homotopia csoportokon alapuló és a kohomológia terekkel történő osztályozás között az, hogy a homotopikus osztályozás ugyab erősebb a eszköz kohomológia terekkel történő osztályozásnál, viszont a sokaságok kohomológia csoportjait, illetve vektornyalábok karakterisztikus osztályait könnyebb meghatározni, mint a megfelelő homotópia csoportokat.

Öt fejezeten keresztül kalauzoljuk el az Olvasót a differenciálgeometria és algebrai topológia eme szép határterületére.

A második fejezet egy sokaság elméleti bevezető, melyben azokat az alapvető definíciókat és tételeket ismertetjük, melyek nélkülözhetetlenek a későbbi fejezetek megértéséhez.

A harmadik fejezet az integrálásról és a de Rham elméletről szól, ennek ismeretében tudunk majd nekivágni a kohomologikus osztályozásnak.

A negyedik fejezet első felében definiáljuk a vektornyalábokat, a fejezet második fele pedig egy rövid bevezetés a karakterisztikus osztályok elméletébe és a Chern-Weil elméletbe. A Chern-Weil elméletet az 1940-es években dolgozta ki Shiing-Shen Chern és André Weil. A Chern-Weil elméletben komplex vektornyalábokhoz rendelünk karakterisztikus osztályokat, melyeket Chern osztályoknak hívunk. Ez az elmélet összekötő szerepet játszik az algebrai topólógia és a differenciálgeometria bizonyos területei között.

Az ötödik fejezetben elvégezzük a gömbök feletti vektornyalábok homotopikus és kohomologikus osztályozását. A fejezet végén az algebrai topologia és a differenciálgeometriai szál összeér azzal, hogy bebizonyítjuk, hogy az S^{2n} gömbök felett az unitér vektornyalábokat az n-edik Chern osztályok osztályozzák. A vizsgálódásunk tárgyát képző gömbök feletti unitér vektornyaláboknak alacsony dimenziós esetekben fizikai interpretációi is vannak. Az S^2 feletti unitér vonalnyalábok a nyugvó mágneses töltéssel (Dirac-féle mágneses monopólus), az S^4 feletti $U(2)$ vektornyalábok pedig a Yang-Mills egyenlet önduális megoldásaival (insztantonok) állnak szoros kapcsolatban.

2. Differenciálgeometriai alapfogalmak

2.1. Sima sokaságok

Ebben a fejezetben a feladat megoldásához nélkülözhetetlen differenciálgeometriai apparátus gerincét képző fogalmak kerülnek bevezetésre. Terjedelmi okok miatt nem áll módunkban a tételek bizonyításait is közölni. Az itt leírtak részletes, bizonyításokat nem nélkülöző tárgyalása az [1] és a [2] könyvekben megtalálható.

2.1. Definíció. *Egy M megszámlálható bázisú Hausdorff teret $n \in \mathbb{N}$ dimenziós C^k sokaságnak ($k \in \mathbb{N}$, $k = \infty$ vagy $k = \omega$) nevezünk, ha teljesülnek a következők:*

1. *M bármely pontjának van $\mathbb{R}^n$-el homeomorf környezete. Legyen $U \subseteq M$ nyílt halmaz, $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ homeomorfizmus, ekkor az (U, φ) párt az M egy* térképének *hívjuk.*

2. *Ha (U, φ) és (V, ψ) két térkép M-en, melyekre $U \cap V \neq \emptyset$, akkor a*

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

   leképezés legyen C^k diffeomorfizmus. Ebben az esetben az (U, φ) és a (V, ψ) térképekre azt mondjuk, hogy C^k kapcsoltak. *M-en térképek egy $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) | \, i \in I\}$ gyűjteményét C^k* atlasznak *nevezzük, ha együttesen lefedik M-et és páronként C^k kapcsoltak.*

3. *Legyen adott M-en egy $\mathcal{D}$-vel jelölt C^k atlasz, melyre igaz, hogy ha egy (U, φ) térkép C^k kapcsolt $\mathcal{D}$ minden elemével, akkor eleme $\mathcal{D}$-nek. Egy ilyen $\mathcal{D}$ atlaszt M-en C^k* struktúrának *hívunk.*

2.1. Megjegyzés. A C^0 sokaságokat topologikus sokaságoknak nevezik, a C^∞ sokaságokat pedig sima sokaságoknak hívják. Whitney egy eredménye alapján a közbülső esetekkel nem foglalkozunk. Ebben a dolgozatban sokaság alatt mindig sima sokaságot fogunk érteni és sokaszor a sima struktúrát sem tüntetjük fel.

2.2. Definíció. *Legyenek $(M, \mathcal{D})$ és (N, Δ) m- illetve n-dimenziós sima sokaságok. A $\Phi : M \to N$ leképezést* differenciálhatónak *(simának) mondjuk, ha tetszőleges $(U, \varphi) \in \mathcal{D}$ és $(V, \psi) \in \Delta$ térképekre fennáll, hogy ha $\Phi(U) \cap V \neq \emptyset$, akkor a $\psi \circ \Phi \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ leképezés differenciálható (sima).*

Amennyiben egy topologikus sokaság ellátható differenciálható struktúrával előfordul, hogy ez többféleképpen is megtehető, ezeket egzotikus sokaságoknak hívjuk. Differenciáltopológiai szempontból az egymással diffeomorf sokaságokat azonosnak tekintjük.

Megjegyezzük, hogy egy sokaság önmagára való sima diffeomorfizmusai csoportot alkotnak, ezt a sokaság diffeomorfizmus csoportjának hívjuk. Megmutatható, hogy az összefüggő sokaságok diffeomorfizmus csoportja tranzitívan hat a sokaságon. Ennek az állításnak a bizonyítása megtalálható [1]-ben.

2.2. Példa. 1. Az egyik legegyszerűbb példa sima sokaságra $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$, melyen egy elemű sima atlasz $(\mathbb{R}^n, \mathrm{Id})$.

2. Az $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, \|x\| = 1\}$ n-dimenziós egységgömbön is megadható egy sima atlasz a következő módon. Kijelölünk két átellenes pontot (E és D) és vesszük az ezen két pont által meghatározott egyenes -mint altér- ortogonális komplementumát (egyenlítő hipersíkja), ez egy n-dimenziós euklideszi tér. Az előbb kijelölt két pontból S^n-et sztereografikusan levetítjük az egyenlítő síkjára a két projekció legyen φ_E és φ_D. Könnyen ellenőrizhető, hogy $\{(S^n \setminus \{E\}, \varphi_E), (S^n \setminus \{D\}, \varphi_D)\}$ kételemű sima atlasz S^n-en.

2.3. Megjegyzés. A peremes sokaság a közönséges sokaság fogalom egy kiterjesztése. A peremes sokaságok annyiban térnek el a közönséges sokaságtól, hogy megengedjük, hogy minden pontnak legyen a zárt féltér —mint topologikus tér— egy nyílt részhalmazával homeomorf környezete.

A peremes sokaság azon pontjait, melyeknek van a teljes tér egy nyílt részhalmazával homeomorf környezete a peremes sokaság belső pontjainak nevezzük. A belső pontok alkotják a peremes sokaság belsejét, a többi peremes sokasághoz tartozó pont pedig a peremes sokaság határát alkotja. Megmutatható, hogy a perempont fogalma jól definiált, azaz térképezés választásától független.

Belátható, hogy a peremes sokaság határa önmagában véve egy eggyel kisebb dimenziós közönséges sokaság, a belseje pedig egy vele azonos dimenziójú közönséges sokaság. A peremes sokaságok bővebb és részletesebb tárgyalása megtalálható [1]-ben.

2.3. Definíció. *Ha az M perem nélküli sokaság —mint topologikus tér— kompakt, akkor M-et* zárt sokaságnak *nevezzük.*

2.2. Sokaságok érintőtere

2.4. Definíció. *Legyen p egy pontja az $(M, \mathcal{D})$ sokaságnak, (U, φ) pedig egy térkép p körül. Legyen $0 \in I \subset R$ egy intervallum. A $\gamma_1, \gamma_2 : I \to M$ sima görbékről akkor mondjuk, hogy első rendben érintik egymást a p pontban az (U, φ) térképre vonatkozóan, ha teljesül, hogy*

1. $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$
2. $(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$

2.1. Állítás. *A fenti definíció jelöléseivel: Ha (V, ψ) szintén egy p körüli térkép, akkor γ_1 és γ_2 pontosan akkor érintkezik első rendben az (U, φ) térképre vonatkozóan, ha első rendben érintkezik a (V, ψ) térképre vonatkozóan is, ezáltal két sokaságbeli sima görbe elsőrendű érintkezése térképfüggetlen, jóldefiniált fogalom.*

Bizonyítás. Tekintsük az $(M, \mathcal{D})$ sokaságon a γ_1 és γ_2 sima görbéket, melyekről feltesszük, hogy $p \in M$-ben első rendben érintik egymást az (U, φ) térképre vonatkozóan. A definícióbeli 1-es tulajdonság nyilván térképfüggetlen, így elég csak a 2-es egyenlőség fennállását ψ-re igazolni. A láncszabályt alkalmazva a két térkép sima kapcsoltságát figyelembe véve közvetlenül adódik az állítás.

$$(\psi \circ \gamma_1)'(0) = (\psi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma_1)'(0) = \mathrm{D}(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi \circ \gamma_1(0))(\varphi \circ \gamma_1)'(0) \overset{1.\text{ és }2.}{=}$$
$$= \mathrm{D}(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi \circ \gamma_2(0))(\varphi \circ \gamma_2)'(0) = (\psi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma_2)'(0) = (\psi \circ \gamma_2)'(0) \quad (2.1)$$

Q.E.D.

2.5. Definíció. *Könnyen látható, hogy az a kijelentés, hogy „két sima görbe első rendben érintkezik egy adott $p \in M$ pontban" ekvivalencia reláció a sokaságban futó sima görbék halmazán, ezért az M sokaság $p \in M$-beli* érintőtere *definiálható a következő módon:*

$$T_pM := \{[\gamma]_p \,|\, \gamma(0) = p\},\ \textit{ahol}$$

$[\gamma]_p$ a $\gamma : I \to M$ sima görbe által reprezentált ekvivalencia osztály.

A fenti definícióból világosan következik, hogy az érintőtér ellátható egy valós vektortér struktúrával, melynek dimenziója a sokaság dimenziójával egyezik meg. Ennek értelmében lehet beszélni a $p \in M$ pontbeli érintőtér duális teréről, melyet koérintőtérnek nevezünk és T_p^*M-al jelölünk. A koérintőtér elemeit kovektoroknak hívjuk.

2.6. Definíció. *A $TM := \coprod_{p \in M} T_pM$ objektumot a sokaság* érintőnyalábjának *nevezzük. Az érintőnyaláb mintájára konstruáljuk meg a* koérintőnyalábot*: $T^*M := \coprod_{p \in M} T_p^*M$.*

Az érintőtér és érintőnyaláb fenti bevezetésének előnye, hogy rendkívül szemléletes és szó szerint átvihető végtelen dimenziós sokaságokra.

Azonban szükségünk lesz az érintőtér egy másik előállítására is. Látni fogjuk, hogy a kétféle előállítás egymással kanonikusan izomorf struktúrákat eredményez. A most következő előállítás hátránya ellenben az, hogy nem lehet az így nyert érintőtér fogalmat közvetlenül általánosítani végtelen dimenziós sokaságokra.

Tekintsük a sokaságon értelmezett valós értékű sima függvényeket. Ezek a pontonkénti műveletekkel és a valós számmal való szorzással algebrát alkotnak a valós számtest felett. Egy M sokaság esetén jelölje ezt a függvényalgebrát $\mathcal{F}(M)$.

2.7. Definíció. *Egy $v : \mathcal{F}(M) \to \mathbb{R}$ leképezésről azt mondjuk, hogy*

1. $\mathbb{R}$-lineáris*, ha $\forall f, g \in \mathcal{F}(M)$ és $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén*

$$v(\alpha f + \beta g) = \alpha v(f) + \beta v(g)$$

teljesül.

2. Deriváció*, ha teljesíti a Leibniz-tulajdonságot, azaz $\forall f, g \in \mathcal{F}(M)$ esetén*

$$v(fg) = v(f) \cdot g + g \cdot v(f).$$

Az M sokaság egy $p \in M$-beli derivációját a sokaság egy p-beli érintővektorának *nevezzük, ezen érintővektorok által alkotott lineáris teret pedig a sokaság p pontbeli* érintőterének *hívjuk*[1].

Az M sokaság egy p pontjában fenti definíció révén nyert objektumot [4] nyomán D_pM-el jelöljük.

2.1. Tétel. *Legyen $(M, \mathcal{D})$ $n \in \mathbb{N}^+$ dimenziós sokaság, $p \in M$, (U, x) pedig egy térkép p körül. Legyen $(e_i)_{i=1}^n$ egy bázis $\mathbb{R}^n$-en. Álljon elő $x : U \to \mathbb{R}^n$ $x = x^i e_i$ alakban. Legyen továbbá $f \in \mathcal{F}(M)$. Ekkor igazak az alábbi kijelentések:*

1. *A $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p : f \mapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_p := \mathrm{D}(f \circ x^{-1})(e_i)(x(p))$ módon értelmezett leképezés D_pM eleme. A $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{(.)} : U \to \mathbb{R}$ leképezést az f függvény i-dik parciális derivált függvényének nevezzük.*

2. *A $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ $1 \leq i \leq n$ differenciáloperátorok D_pM egy bázisát alkotják. Ebben a bázisban tetszőleges $v \in D_pM$ $v = v(x^i)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ alakban áll elő.*

Most pedig megmutatjuk, hogy az érintővektorok kétféle bevezetése lényegében ugyanazt a struktúrát eredményezi, azaz D_pM és T_pM között kanonikus izomorfizmus áll fenn. Ezek után az érintőtér elemeire gondolhatunk úgy, mint vektorokra, vagy mint lineáris differenciáloperátorokra. A koérintőtér elemeire pedig gondolhatunk úgy, mint kovektorokra vagy mint koordináta differenciálokra.

2.2. Állítás. *Egy $(M, \mathcal{D})$ sokaság tetszőleges $p \in M$ pontját véve a T_pM és D_pM vektorterek egymással kanonikusan izomorfak.*

Bizonyítás. Legyen $(M, \mathcal{D})$ $n \in \mathbb{N}^+$ dimenziós sokaság, $p \in M$, (U, x) pedig egy térkép p körül. Legyen $(e_i)_{i=1}^n$ egy bázis $\mathbb{R}^n$-en. Álljon elő $x : U \to \mathbb{R}^n$ $x = x^i e_i$ alakban. Legyen I egy 0-t tartalmazó intervallum, $\gamma : I \to M$ pedig egy sima görbe, amely a T_pM definíciójában szereplő $[\gamma]_p$ ekvivalencia osztály egy reprezentánsa.

$$(x \circ \gamma)'(0) = (x^i \circ \gamma)'(0) e_i \tag{2.2}$$

Az izomorfizmust T_pM és D_pM bázisvektorain a következő hozzárendelés adja meg:

$$e_i \mapsto \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \tag{2.3}$$

Ezt lineárisan kiterjesztve izomorfizmust kapunk T_pM és D_pM közt. Az izomorfizmus kanonikus volta következik abból, hogy a $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ 2.1 tételbeli definíciójában is $\mathbb{R}^n$ $(e_i)_{i=1}^n$ bázisvektorait használtuk.

[1] A precíz tárgyalás megkövetelné, hogy az érintővektorokat eleve függvénycsírákon értelmezzük, ezt követi [1], vagy belássuk, hogy az érintővektorok lokális objektumok, ezt követi [2]. Az sem triviális, hogy ebben a definícióban az érintővektorok valóban lineáris teret alkotnak, de ennek bizonyítása egyszerű számolás, melyet az Olvasóra bízunk.

Q.E.D.

Ezek után T_pM-et és D_pM-et nem különböztetjük meg és az érintőtérre a T_pM jelölést fogjuk használni.

2.8. Definíció. *Legyenek $(M, \mathcal{D})$ és (N, Δ) sokaságok, a $\Phi : M \to N$ pedig egy sima leképezés. Legyen $p \in M$, és $v \in T_pM$. A Φ-hez tartozó p-beli* érintő leképezést *$(\Phi_*)_p$-vel jelöljük és a következőképpen definiáljuk:*

$$(\Phi_*)_p : T_pM \to T_{\Phi(p)}N \quad v \mapsto (\Phi_*)_p(v)$$

Ahol $(\Phi_*)_p(v)$ hatása egy $f \in \mathcal{F}(N)$ sima függvényre:

$$(\Phi_*)_p(v)(f) := v(f \circ \Phi)$$

A következő tételben az érintőleképezés legfontosabb tulajdonságait gyűjtöttük össze[2].

2.2. Tétel. *A fenti definíció jelöléseit használva:*

1. $(\Phi_*)_p \in Hom(T_pM, T_{\Phi(p)}N)$.
2. *Ha Φ diffeomorfizmus, akkor $(\Phi_*)_p$ lineáris izomorfizmus.*
3. $(\mathrm{Id}_*)_p = \mathrm{Id}_{T_pM}$
4. *Ha (K, Γ) sokaság, $\Psi : N \to K$ pedig sima leképezés, akkor tetszőleges $p \in M$ esetén fennáll, hogy*

$$\left[(\Psi \circ \Phi)_*\right]_p = (\Psi_*)_{\Phi(p)} \circ (\Phi_*)_p \ \textit{(láncszabály)}$$

2.3. Tenzormezők sokaságokon

2.9. Definíció. *Az $X : M \to TM$ leképezést az M sokaságon adott* vektormezőnek *hívjuk, amennyiben $\forall p \in M$ $X(p) \in T_pM$. Egy vektormezőről akkor mondjuk, hogy sima, ha tetszőleges $f \in \mathcal{F}(M)$ esetén a $M \ni p \mapsto X(p)(f) \in \mathbb{R}$ leképezés sima. A továbbiakban vektormező alatt mindig sima vektormezőt fogunk érteni. Az M sokaságon értelmezett vektormezők halmazát $\mathcal{T}(M)$-el jelöljük.*

Ellenőrizhető, hogy egy sokaságon értelmezett vektormezők a pontonkénti összeadással és számmal való szorzással vektorteret alkotnak. Arról is könnyű meggyőződnünk, hogy $\mathcal{T}(M)$ egy $\mathcal{F}(M)$ feletti modulus.

2.10. Definíció. *Az $\omega : M \to T^*M$ leképezést az M sokaságon adott* elsőrendű differenciálformának *(röviden 1-formának) nevezzük, ha $\forall p \in M$ $\omega(p) \in T_p^*M$. Egy elsőrendű differenciálformáról akkor mondjuk, hogy sima, ha tetszőleges sima $X : M \to TM$ vektormezőt véve az $M \ni p \mapsto \omega(p)(X) \in \mathbb{R}$ leképezés sima. Az M-en adott 1-formák terét jelölje Ω^1M.*

[2]Kategória elméleti szóhasználattal élve az érintőleképezés egy kovariáns funktor.

A lineáris algebrából ismert tenzorszorzás művelet segítségével tetszőleges M sokaság és $p \in M$ esetén értelmezhető a $T_p^{(r,s)}M := \left(\otimes^r T_p^* M\right) \otimes (\otimes^s T_p M)$ lineáris tér, melynek elemeit r-szeresen kovariáns és s-szeresen kontravariáns tenzoroknak nevezzük. A $T_p^{(r,0)}M$ tenzortér két fontos altere a $\bigwedge_p^r M$ antiszimmetrikus- és a $\bigvee_p^r M$ szimmetrikus formák tere.

2.11. Definíció. *Az M sokaságon értelmezett (r,s) típusú sima* tenzormező *alatt egy $\chi : p \mapsto \chi(p) \in T_p^{(r,s)}M$ leképezést értünk, melyre $\forall X_i$ $i \in \{1,\dots,r\}$ vektormezőkre és $\forall \omega_j$ $j \in \{1,\dots,s\}$ sokaságon értelmezett 1-formára igaz, hogy*

$$\chi(.)(X_1,\dots,X_r,\omega_1,\dots,\omega_s) \in \mathcal{F}(M).$$

Az érintőleképezés pontonkénti alkalmazásával értelmezzük a $(0,s)$ típusú tenzormezők előretolását (push forward) és az $(r,0)$ típusú tenzormezők visszahúzását (pull back).

2.12. Definíció. *Legyenek $(M,\mathcal{D})$ és (N,Δ) sokaságok. Legyen $(\Phi_*)_p : T_pM \to T_{\Phi(p)}N$ a $\Phi : M \to N$ sima leképezéshez tartozó érintő leképezés.*

I. Az M-en adott $(0,s)$ típusú tenzormezők előretolását *N-re az alábbi leképezés teljes térre történő lineáris kiterjesztésével kaphatjuk meg.*

$$(\forall X_1,\dots,X_s \in \mathcal{T}(M))\ \bigotimes_{k=1}^{s} X_k \mapsto \Phi_*\left(\bigotimes_{k=1}^{s} X_k\right) := \bigotimes_{k=1}^{s} (\Phi_*)_{\Phi^{-1}(.)} X_k(\Phi^{-1}(.))$$

II. Az N-en értelmezett $(r,0)$ típusú tenzormezők Φ-vel való visszahúzását *M-re a következő leképezés lineáris kiterjesztettje szolgáltatja*[3]

$$(\forall \omega_1,\dots,\omega_r \in \Omega^1 N)\ \bigotimes_{k=1}^{r} \omega_k \mapsto \Phi^*\left(\bigotimes_{k=1}^{r} \omega_k\right) := \bigotimes_{k=1}^{r} \omega_k(\Phi(.))(\Phi_* \circ (.))$$

2.4. Lie-csoportok és Lie-algebrák

2.13. Definíció. *Egy G sokaságot* Lie-csoportnak *nevezünk, ha adva van rajta egy csoport struktúra és a csoport műveletek (szorzás, inverz képzés) simák. Lie-csoportok szorzás műveletét „$\cdot$"-al, az egységelemét pedig e-vel fogjuk jelölni (multiplikatív írásmód). Tetszőleges $g \in G$ esetén a $\lambda_g := g \cdot (.) : G \to G$ és a $\rho_g := (.) \cdot g : G \to G$ leképezések sima diffeomorfizmusok, ezeket g-vel való bal- illetve jobb eltolásnak fogjuk nevezni.*

Kommutatív Lie-csoportra példa $\mathbb{T} = S^1$ a komplex szorzással. A kvaternió egységgömb (S^3) a kvaternószorzással, illetve az $n \times n$-es invertálható mátrixok csoportja a mátrixszorzással nem kommutatív Lie-csoportot alkot.

Egy Lie-csoportra tekinthetünk úgy is, mint egy sima sokaságra, melynek diffeomorfizmus csoportjának egy részcsoportja a sokaság elemeivel reprezentálható. A csoport tulajdonság következménye, hogy egy Lie-csoport összefüggő komponensei -mint részsokaságok- egymással diffeomorfak.

[3] A tenzor előretolásra és visszahúzásra az érintőleképezés tulajdonságaival analóg tulajdonságok bizonyíthatók. A Φ_* leképezés kovariáns, míg a Φ^* leképezés kontravariáns funktorként viselkedik.

Egy Lie-csoport egyben lokálisan kompakt Hausdorff topologikus csoport, Haar Alfréd tétele szerint létezik rajta balinvariáns radon mérték, mely szerint a kompakt tartójú folytonos függvények integrálhatók.

A következő állítás egy érdekes bizonyítási technikát mutat be. Nevezetesen azt, hogy számos egzisztencia tétel bizonyítható Lie-csoportokon oly módon, hogy a lokális konstrukció után a kapott objektumot a csoport szorzás segítségével „globalizáljuk" (bővebben ld.:[4]).

2.3. Állítás. *Minden G Lie-csoporton megadható* $\dim(G)$ *számú sima vektormező, amelyek G minden pontjában lineárisan független érintő vektorokat vesznek fel értékül.*

Bizonyítás. Legyen $n = \dim(G)$ és legyen $\{b_1(e), b_2(e), \ldots, b_n(e)\}$ T_eG egy bázisa. Említettük, hogy tetszőleges $g \in G$ esetén a $\lambda_g : G \to G$ leképezés diffeomorfizmus, következésképpen a

$$(\lambda_{g*})_e : T_eG \to T_{\lambda_g(e)}G = T_gG \tag{2.4}$$

érintőleképezés izomorfizmus, ezért T_eG egy bázisát T_gG-nek szintén egy bázisába képezi. Tetszőleges $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén tekintsük a

$$b_k : G \to TG \quad G \ni g \mapsto b_k(g) := (\lambda_{g*})_e \circ b_k(e) \in T_gG \tag{2.5}$$

leképezéseket. Az, hogy $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$ $b_k \in \mathcal{T}(G)$ egyszerűen abból következik, hogy λ_g sima diffeomorfizmus, a minden pontbeli lineáris függetlenség pedig a fenti megállapításból fakad.

Q.E.D.

2.4. Következmény. Abból, hogy tetszőleges G Lie-csoporton létezik bázismező következik, hogy a Lie csoport érintőnyalábja triviális azaz

$$TG \cong G \times \mathbb{R}^{\dim(G)}. \tag{2.6}$$

Legyen $\dim(G) = n$ és $\mathbb{R}^n$ egy bázisa $e_1, \ldots, e_n$, a megfelelő koordináta függvények pedig $x^1, \ldots, x^n$. Legyen $b_1, \ldots, b_k$ egy bázismező G-n. Vegyük az alábbi megfeleltetést.

$$\varphi : G \times \mathbb{R}^n \to TG \quad (g, x^i e_i) \mapsto \varphi(g, x^i e_i) := x^i b_i(g) \tag{2.7}$$

A φ hozzárendelésről láthatjuk, hogy egy diffeomorfizmus, mely nem kanonikus, ugyanis függ attól, hogy G-n milyen bázismezőt választunk.

Frank Adams nehéz tétele értelmében a gömbök közül csupán csak az S^1, S^3 és S^7 gömbök érintőnyalábja triviális, de csak az S^1-en és S^3-on adható meg olyan szorzás művelet[4], mellyel Lie-csoportot kapunk.

A Lie-algebra fogalma a Lie-csoport fogalmával szorosan összefügg, de a köztük fennálló geometriai kapcsolatot csak a XX. század 30'-as éveiben tárták fel. Ezzel kapcsolatban az [1] és [10] műveket érdemes fellapozni.

[4]Hilbert 5. problémájának megoldása szerint a csoport struktúra lényegében meghatározza a sima struktúrát ld. [1].

2.14. Definíció. *Egy valós számtest feletti V vektorteret egy $[\cdot,\cdot] : V \times V \to V$ művelettel ellátva* Lie-algebrának *nevezünk, ha ez a művelet rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:*

1. *Első változójában lineáris:*

$$(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})(\forall X, Y, Z \in V) \quad [\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha[X, Z] + \beta[Y, Z]$$

2. *Antiszimmetrikus:*

$$(\forall X, Y \in V) \quad [X, Y] = -[Y, X]$$

3. *Teljesül a Jacobi azonosság:*

$$(\forall X, Y, Z \in V) \quad [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

Az 1. és 2. tulajdonságokból a $[\cdot,\cdot]$ művelet bilinearitása már következik.

Lie-algebrákra a szokásos absztrakt algebrai konstrukciók értelmezhetők. Ilyenek például homomorfizmus, izomorfizmus, részalgebra, direkt összeg, direkt szorzat, ideál, faktoralgebra stb.. Mi ezeket itt nem definiáljuk, definíciójukat ismertnek tételezzük fel.

Lássunk néhány egyszerű példát Lie-algebrára:

1. A legegyszerűbb példa Lie-algebrára egy vektortér, melyen a szorzást úgy definiáljuk, hogy bármely két elem szorzata legyen nulla. Ezzel a művelettel a vektortér Lie-algebrává válik, melynek neve: nullszorzású Lie-algebra.

2. Az $\mathbb{R}^3$ vektortér a vektoriális szorzással ellátva szintén Lie-algebra.

3. Minden asszociatív algebrán bevezethető egy olyan művelet, mellyel az Lie-algebrává válik. Legyen ugyanis $(A, \circ)$ egy asszociatív algebra és értelmezzük a

$$[\cdot,\cdot] : A \times A \to A$$

   műveletet a következő módon:

$$(\forall a, b \in A)\, [a, b] := a \circ b - b \circ a$$

   Ellenőrizhető, hogy tényleg Lie-algebrát kaptunk, de ennél több is igaz. Nevezetesen az, hogy tetszőleges Lie-algebra beágyazható egy olyan Lie-algebrába, melyet az előbb leírt módon egy asszociatív algebrából gyártottunk le. Az így bevezetet művelet az A algebrabeli művelet nem kommutativitását méri, ezért kommutátornak is nevezik.

4. A mechanika Hamilton-féle Poisson zárójeles tárgyalásában az obszervábilisek[5] a Poisson zárójellel ellátva szintén Lie-algebrát alkotnak.

[5]Obszervábiliseknek nevezzük a fázistéren téren -mint szimplektikus sokaságon- értelmezett valós értékű sima függvényeket.

2.5. Példa. Legyen X és Y vektormezők egy M sokaságon, X és Y Lie-zárójeles szorzatán a következő $[X,Y]$-al jelölt vektormezőt értjük.

$$[\cdot,\cdot] : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \to \mathcal{T}(M) \quad (\forall f \in \mathcal{F}(M))[X,Y](f) := X \circ Y \circ f - Y \circ X \circ f$$

Ellenőrizhető, hogy ez a hozzárendelés valóban vektormezőt eredményez és a vektormezők alkotta vektortér ezzel a művelettel ellátva egy Lie-algebra, melyet az M sokaságon értelmezett vektormezők Lie-algebrájának nevezünk.

Ha M és N sokaságok, $\Phi : M \to N$ pedig sima leképezés, akkor megmutatható, hogy a Φ_* érintőleképezés Lie-algebra homomorfizmus a $(\mathcal{T}(M), [\cdot,\cdot])$ és $(\mathcal{T}(N), [\cdot,\cdot])$ Lie-algebrák közt. Amennyiben Φ diffeomorfizmus úgy Φ_* Lie-algebra izomorfizmus.

Most pedig rávilágítunk a Lie-algebrák és Lie-csoportok kapcsolatára. Megmutatjuk, hogy Lie-csoporthoz hogyan rendelhetünk Lie-algebrát, ehhez szükség lesz a Lie-csoportokon értelmezett balinvariáns vektormező fogalmára.

2.15. Definíció. *Legyen G egy Lie-csoport. Akkor mondjuk az $X \in \mathcal{T}(G)$ vektormezőről, hogy* balinvariáns vektormező*, ha a Lie-csoport tetszőleges g elemére fennáll, hogy*

$$(\lambda_g)_*(X \circ \lambda_g^{-1}) = X.$$

Az érintőleképezés tulajdonságaiból adódóan egy G Lie-csoporton értelmezett balinvariáns vektormezők egy alterét alkotják a $\mathcal{T}(G)$ vektortérnek.

2.4. Állítás. *Egy G Lie-csoporton értelmezett balinvariáns vektormezők altere a vektormezők Lie-zárójeles szorzására nézve zárt.*

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy ha X és Y balinvariáns vektormező a G Lie-csoporton, akkor az $[X,Y]$-al jelölt Lie zárójelük is az. Vegyünk tetszőleges G-beli g és p elemeket.

$$\begin{aligned}(\lambda_g)_*[X,Y] \circ \lambda_g^{-1}(p)(.) = [X,Y] \circ \lambda_g^{-1}(p)((.) \circ \lambda_g) = (X \circ Y - Y \circ X) \circ \lambda_g^{-1}(p)((.) \circ \lambda_g) = \\ = X \circ \underbrace{Y \circ \lambda_g^{-1}(p)((.) \circ \lambda_g)}_{(\lambda_g)_* Y \circ \lambda_g^{-1}(p)(.) = Y(p)(.)} - Y \circ \underbrace{X \circ \lambda_g^{-1}(p)((.) \circ \lambda_g)}_{(\lambda_g)_* X \circ \lambda_g^{-1}(p)(.) = X(p)(.)} = [X,Y](p)(.) \end{aligned} \tag{2.8}$$

Q.E.D.

Ebből az következik, hogy a balinvariáns vektormezők a vektormezők alkotta vektortérnek nem csupán vektor alterét alkotják, hanem a Lie-csoporton értelmezett vektormezők Lie-algebrájának részalgebráját is.

2.16. Definíció. *Egy G Lie-csoport Lie-algebrája alatt a G-n értelmezett balinvariáns vektormezők alkotta Lie-algebrát értjük. A G Lie-csoport Lie-algebráját $\mathfrak{g}$-vel jelöljük.*

2.3. Tétel. *Egy G Lie-csoport tetszőleges g eleme feletti T_gG érintőtéren adott egy Lie-algebra struktúra, amely kanonikusan izomorf G Lie-algebrájával.*

Az előbb láttuk, hogy tetszőleges Lie-csoporthoz tartozik egy, a Lie csoport által egyértelműen meghatározott Lie-albegra. Ennek az állításnak a megfordítása azonban csak bizonyos feltételek teljesülése esetén igaz. Erről szól a Lie-Cartan tétel, amellyel a Lie-csoportok és Lie-algebrák kapcsolata teljessé válik.

2.4. Tétel. *A véges dimenziós Lie-algebrák izomorfizmus osztályai kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésben állnak az egyszeresen összefüggő Lie-csoportok izomorfizmus osztályaival. Minden -izmorfizmus erejéig meghatározott- egyszeresen összefüggő Lie-csoporthoz egy olyan Lie-algebra rendelhető, amely izomorf az ő Lie-algebrájával.*

3. A de Rham elméletről dióhéjban

3.1. A külső deriválás

3.1. Definíció. *Akkor mondjuk ω-ról, hogy hogy az M sokaságon értelmezett $r \in \mathbb{N}$ rendű* differenciálforma *(vagy külső forma), ha ω egy olyan $(r, 0)$-típusú tenzormező M-en, amely M bármely p pontjában a $\bigwedge_p^r M$ térből veszi fel értékeit. Az M sokaság feletti r-rendű differenciálformák $\mathbb{R}$-felett vektorteret, $\mathcal{F}(M)$ felett pedig modulust alkotnak. Az r-rendű differenciálformák alkotta $\mathbb{R}$-feletti lineáris teret $\Omega^r M$-el jelöljük.*

Tetszőleges M sokaság esetén a lineáris algebrából ismert konstrukciókat alkalmazva megkaphatjuk a differenciálformák $\Omega^*(M)$ terét.

$$\Omega^*(M) := \bigoplus_{r=0}^{\infty} \Omega^r M \tag{3.1}$$

Ennek a térnek az

$$\Omega^*(M) := \Omega^k M \oplus \bigoplus_{r=0, r\neq k}^{\infty} 0_r \text{ (Ahol } 0_r \text{ az } \Omega^r M \text{tér origója.)} \tag{3.2}$$

alterét az M-en értelmezett homogén k-formák terének nevezzük. Persze ez az altér kanonikusan izomorf $\Omega^k M$-el, így jelölésben nem is különböztetjük meg őket. $\Omega^*(M)$-et elláthatjuk egy $\wedge$-el jelölt szorzás művelettel, amelyet a homogén formákon pontonkénti műveletként definiálunk, majd lineárisan kiterjesztjük teljes $\Omega^*(M)$-re. A kapott struktúra egy asszociatív algebra, melyt az M sokaság Grassmann algebrájának vagy külső algebrájának nevezünk. Amennyiben adottak az M és N sokaságok és köztük a sima $\Phi : N \to M$ leképezés. A Φ-hez tartozó Φ^* forma visszahúzás M és N külső algebrájára komponensenként kiterjeszthető, ezért rá külön jelölést nem vezetünk be.

3.1. Megjegyzés. Ahogy az $\bigwedge_p^0 M$ teret $\mathbb{R}$-el azonosíthatjuk, úgy a $\Omega^0 M$ térnek $\mathcal{F}(M)$-et feleltethetjük meg. Hasonlóképpen igaz $n > \dim(M)$ esetén, hogy $\Omega^n M = 0 \in \mathcal{F}(M)$.

3.1. Tétel. *Vegyünk egy M sokaságot, ekkor létezik egy egyértelműen meghatározott $\mathrm{d} : \Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$ lineáris leképezés, amely a következő feltételeket teljesíti:*

1. $(\forall k \in \{0, \dots, \dim(M)\}) \quad \mathrm{Im}\,(\mathrm{d}|_{\Omega^k M}) \subset \Omega^{k+1} M$
2. $(\forall \omega_1, \omega_2 \in \Omega^*(M)) \quad \omega_1 \in \Omega^k M \Rightarrow \mathrm{d}(\omega_1 \wedge \omega_2) = \mathrm{d}\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge \mathrm{d}\omega_2$
3. $(\forall v \in \mathcal{T}(M), f \in \mathcal{F}(M)) \quad \mathrm{d}f(v) = v(f)$
4. $(\forall f \in \mathcal{F}(M)) \quad \mathrm{d} \circ \mathrm{d}(f) = 0$
5. *Ha N szintén sokaság $\Phi : N \to M$ pedig egy sima leképezés, akkor* $\mathrm{d}(\Phi^*(.)) = \Phi^*(\mathrm{d}(.))$.

A $\mathrm{d} : \Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$ leképezést külső deriválásnak nevezzük.

A külső deriválás lokális alakját a külső derivált 1.-4. tulajdonságai egyértelműen meghatározzák. Az 5. tulajdonság felel azért, hogy a térképeken értelmezett lokális alakok kompatibilisek legyenek egymással. A lokális alak ismeretében pedig megmutatható, hogy $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$.

3.1. Állítás. *Legyen M sokaság és legyen $m = \dim(M)$. Legyen $\omega \in \Omega^k M$ és legyen (U, x) egy térkép. Ekkor léteznek $(\forall j \in \{1, \ldots, k\})\, 1 \leq i_j \leq m \Rightarrow \omega_{i_1,\ldots,i_k} \in \mathcal{F}(M)$ függvények, hogy ω az (U, x) térképen az alábbi lokális alakban áll elő.*

$$\omega|_U = \sum_{1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_k \leq m} \omega_{i_1,\ldots,i_k} \bigwedge_{l=1}^{k} \mathrm{d}x^{i_l} \tag{3.3}$$

Ekkor $\mathrm{d}\omega \in \Omega^{k+1}M$ lokális alakja az (U, x) térképen:

$$\mathrm{d}\omega|_U = \sum_{j=1}^{k} \sum_{1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_k \leq m} \frac{\partial \omega_{i_1,\ldots,i_k}}{\partial x^j} \mathrm{d}x^j \wedge \bigwedge_{l=1}^{k} \mathrm{d}x^{i_l} \tag{3.4}$$

3.2. De Rham kohomológia csoportok

3.2. Definíció. *Legyen M sokaság, továbbá legyen $0 \leq k \leq \dim(M)$.*

1. *A $Z^k M = \mathrm{Ker}\, \mathrm{d}|_{\Omega^k M}$ lineáris tér elemeit* zárt *k-formáknak nevezzük.*

2. *A $B^k M = \mathrm{Im}\, \mathrm{d}|_{\Omega^{k-1} M}$ lineáris teret pedig az* egzakt *k-formák alkotják.*

Minden $\dim(M)$-rendű homogén formát zártnak fogunk tekinteni, továbbá megállapodunk abban, hogy az egyetlen egzakt 0-forma az azonosan nulla függvény.

A $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$ egyenlőségből következik, hogy $B^k M \subseteq Z^k M$. Két zárt formáról akkor mondjuk, hogy kohomológok, ha különbségük egy egzakt forma. A kohomológia egy ekvivalencia reláció a zárt formák terén. A kohomológia által származtatott faktorstruktúrát nevezzük k-adik de Rham kohomológia csoportnak.

$$H^k_{\mathrm{dR}} M := \frac{Z^k M}{B^k M} \tag{3.5}$$

A k-adik de Rham kohomológia csoport valójában persze egy vektortér, de a figyelem középpontjában gyakran mégis eme vektortér additív csoportja áll, ezért a szakirodalmak általában de Rham kohomológia csoportként említik. A $H^k_{\mathrm{dR}} M$ tér dimenzióját -amennyiben ez véges- k-adik Betti-számnak hívjuk és b_k-val jelöljük.

3.2. Állítás. *Egy $n \in \mathbb{N}$ összefüggő komponensből álló M sokaságra $H^0_{\mathrm{dR}} M \simeq \mathbb{R}^n$.*

Nagyon érdekes, hogy bár a de Rham kohomológia csoportokat tisztán a differenciálható struktúra segítségével származtatott objektumokkal definiáltuk mégis rengeteg információval szolgálnak az alaptér topológiáját illetően. Mivel a külső deriválás és a forma visszahúzás felcserélhető műveletek következik, hogy a kohomológia csoportok diffeomorfizmus-invariánsak. A de Rham tétel azonban ennél jóval többet állít.

3.2. Tétel (de Rham). *Legyen M zárt, irányítható*[6] *sokaság. Ha valamely egész k-ra $0 \leq k \leq \dim M$, akkor teljesül, hogy*

1. $\dim H^k_{\mathrm{dR}}(M) < \infty$

2. *$H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ kanonikusan izomorf M k-adik szinguláris kohomológia csoportjával*[7].

A szinguláris kohomológia csoportok nemcsak differenciálható sokaságokra, hanem tetszőleges topologikus terekre is definiálhatók. A szinguláris kohomológia csoportokról megmutatható, hogy homotopikus invariánsak [5], ezért ha két sokaság mint topologikus tér homotóp, akkor a megfelelő kohomológia csoportjai izomorfak egymással. Világos most már az is, hogy miért szokás a sokaságok kohomológia terekeit kohomológia csoportoknak nevezni.

3.3. Tétel (Poincaré).

$$(\forall n, k \in \mathbb{Z}^+)\; H^k_{\mathrm{dR}}\mathbb{R}^n = 0 \tag{3.6}$$

A Poincaré tételből és a de Rham csoportok homotopikus invarianciájából következik, hogy $\mathbb{R}^n$ tetszőleges csillagszerű tartományaihoz rendelhető kohomológia csoportok triviálisak.

A de Rham kohomológia terek jelentős szerepet töltenek be a differenciálegyenletek elméletében (ld.:[4]). Legyen M sokaság és tekintsük a sokaság felett az $\mathrm{d}\omega = \phi$ egyenletet, ahol ω és ϕ differenciálformák M felett. Visszatekintve a külső deriválás lokális alakjára látható, hogy ez az egyenlet lokálisan egy elsőrendű lineáris parciális differenciálegyenletnek rendszernek felel meg. Ilyen alakban írhatók fel például az elektrodinamika Maxwell egyenletei is. A külső deriválás $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$ tulajdonságából következik, hogy adott ha ϕ differenciálformához létezik az egyenletet kielégítő ω differenciálforma, akkor szükségképpen $\mathrm{d}\phi = 0$-nak is teljesülni kell. Fordítva azonban ez általában nem áll fenn. Amennyiben $\phi \in \Omega^k M$ megfelelő ω pontosan akkor létezik, ha $\phi \in B^k M$. Ebből látszik, hogy a $\mathrm{d}\phi = 0$ szükséges feltétel elégségessé válik, amennyiben $H^k_{\mathrm{dR}} M = 0$.

3.2. Példa. Tekintsük $\mathbb{R}^2$-et a kanonikus differenciálható struktúrával, legyen U egy csillagszerű tartomány, amire úgy tekintünk, mint részsokaságra. Legyenek $f, g : U \to \mathbb{R}$ differenciálható függvények. Adott az $\Omega^1 U \ni f(x,y)\mathrm{d}x + g(x,y)\mathrm{d}y = 0$ differenciálegyenlet. Az ilyen differenciálegyenleteket akkor szokás egzakt differenciálegyenletnek hívni, ha az egyenlet bal oldala egy egzakt 1-forma. Az U tartomány csillagszerű, ezért elég ellenőrizni a forma zártságát, ebből következik az egzaktság.

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(f(x,y)\mathrm{d}x + g(x,y)\mathrm{d}y) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \frac{\partial g}{\partial x}\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x + \frac{\partial g}{\partial y}\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}y = \\ = \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = 0 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Amennyiben $\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x} = 0$ igaz, hogy $\exists F \in \Omega^1 U$ sima függvény, hogy $\mathrm{d}F = f(x,y)\mathrm{d}x + g(x,y)\mathrm{d}y$, azaz $\frac{\partial F}{\partial x} = f$ és $\frac{\partial F}{\partial y} = g$. Ezekből a feltételekből F meghatározható. A $\mathrm{d}F = 0$ egyenlet pedig pontosan F szintfelületein -mint egydimenziós részsokaságokon- teljesül.

[6] Lásd.: 3.4 definíció

[7] A szinguláris kohomológia csoportokat nem definiáltuk, definíciójuk megtalálható [5]-ben. Ugyanitt megtalálható a de Rham tétel bizonyítása is.

3.3. Differenciálformák integrálása

A differenciálformák integráljának definiálásához szükségünk lesz az egységosztás tételre. Az itt kimondott sima egységpartícióról szóló tétel megtalálható [1]-ben, de létezik ennél sokkal általánosabb formája is, erről bővebben [8]-ban lehet olvasni. Az Olvasó ugyanitt megtalálhatja tétel megértéséhez szükséges elemi topológiai ismereteket is.

3.3. Definíció. *Egy M sokaságon adott $\{f_i | i \in I\}$ valós értékű sima függvények alkotta rendszert* sima egységosztásnak *nevezünk, ha* $(\forall i \in I)$ $(0 \leq f_i \leq 1)$, *a* $\{\mathrm{supp} f_i | i \in I\}$ *halmazrendszer lokálisan véges és* $\sum_{i \in I} f_i = 1$.

Egy M sokaságon adott $\{f_i | i \in I\}$ sima egységosztásról azt mondjuk, hogy a sokaság egy $\{U_j | i \in J\}$ nyílt fedésének alá van rendelve, ha $(\forall i \in I)(\exists j \in J)\,(\mathrm{supp} f_i \subset U_j)$.

3.4. Tétel. *Ha $\{U_i | i \in I\}$ egy M peremes sokaságnak olyan lokálisan véges nyílt fedése, hogy $\overline{U_i}$ kompakt minden $i \in I$-re, akkor megadható egy sima egységosztás M-en, ami az $\{U_i | i \in I\}$ fedésnek van alárendelve.*

Az egységosztás tétel a differenciálgeometriában betöltött központi szerepét annak köszönheti, hogy számos olyan állítás van, melyet elég a sokaság egy térképén belátni, majd a bizonyítást az egységosztás tétel segítségével globalizálni és ezzel a sokaság egészére érvényessé tenni. Ezt az utat fogjuk majd követni az általános Stokes-tétel bizonyításánál is.

Az integrálfogalom sokaságokra történő kiterjesztését [1]-szerint végezzük. Jelölje $\Omega_c^k(M)$ az M sokaság feletti kompakt tartójú k-formák halmazát. Vezessük be az

$$\mathbb{R}_+^n := \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n | x^1 \geq 0\}$$

jelölést és lássuk el $\mathbb{R}_+^n$-t a kanonikus peremes sokaság struktúrával. Legyen U nyílt $\mathbb{R}_+^n$-ban, ekkor

$$(\forall \omega \in \Omega_c^n(U)(\exists f \in \mathcal{F}_c(U, \mathbb{R})) \quad \omega = f \bigwedge_{k=1}^{n} dx^k. \tag{3.8}$$

Az $\omega \in \Omega_c^n(U)$ forma U-ra vett integrálját a következő módon értelmezzük:

$$\int_U \omega := \int_U f \, \mathrm{d}\lambda^n \tag{3.9}$$

Ahol λ^n az n-dimenziós Lebesgue mérték.

3.4. Definíció. *Egy peremes M sokaságot* irányíthatónak *nevezünk, ha M-en a térképek közötti átmeneteket leíró leképezések deriváltjainak (Jacobi mátrix) determinánsa pozitív.*

Egy peremes M sokaság irányíthatóságával ekvivalens, hogy M-en megadható rajta egy seholsem nulla maximális differenciálforma. A M peremes sokaság egy irányítása a sokaság peremén definiál egy kanonikus irányítást. Ez alatt a következőt értjük. Legyen $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) | i \in I\}$ M-en az irányítást definiáló atlasz. Alkossák ∂M egy $\mathcal{A}'$ atlaszát azok a ∂M sima struktúrájához tartozó (V, ψ) térképek, melyekre igaz, hogy

$$\exists (U_i, \varphi_i) \in \mathcal{A} \quad V = U_i \cap \partial M \quad \psi = \varphi_i|_{U_i \cap \partial M}. \tag{3.10}$$

Megmutatható, hogy az $\mathcal{A}'$ atlasz ∂M-en egy irányítást értelmez, ezt hívjuk ∂M kanonikus irányításának. Az indukált vagy örökölt irányítás páros dimenziós sokaságok esetén egybe esik a kanonikus irányítással, páratlan dimenziós sokaságok esetén pedig annak ellentettje.

3.5. Tétel. *Legyen M egy n-dimenziós irányítható peremes sokaság, ekkor egyértelműen létezik $\int\limits_M \in \Omega_c^{n*}(M)$, melyre igaz az alábbi kijelentés. Ha $U \subseteq M$, $V \subseteq \mathbb{R}_+^n$ nyílt halmazok, $\Phi : V \to U$ pedig egy irányítástartó[8] diffeomorf szürjekció, akkor*

$$(\forall \omega \in \Omega_c^n(M)) \quad (\operatorname{supp}(\omega) \subset U) \Rightarrow \int\limits_M \omega = \int\limits_V \Phi^* \omega. \tag{3.11}$$

Most pedig eljutottunk oda, hogy minden eszközünk meg van ahhoz, hogy kimondjuk és bizonyítsuk az általános[9] Stokes-tételt. Ezt a tételt attól függően, hogy hány dimenzióra mondják ki különböző névvel illetik: 1 dimenzióban Newton-Leibnitz formula, 2 dimenzióban (közönséges) Stokes-tétel, 3 dimenzióban Gauss-Osztrogradszkij tétel vagy divergenciatétel a neve. Bizonyításunk lényegében az [1]-ben vázolt bizonyítás gondolatmenetét követi, de a kompaktabb alakra való törekvés okán néhány lépést módosítottunk.

3.6. Tétel. *Legyen M egy n-dimenziós irányított peremes sokaság, ∂M pedig az M pereméként adódó $n-1$ dimenziós sokaság az M-től örökölt irányítással. Amennyiben $\omega \in \Omega_c^{n-1}(M)$ és $\mathrm{In} : \partial M \to M$ a tartalmazás által definiált sima beágyazás, akkor igaz, hogy*

$$\int\limits_M \mathrm{d}\omega = \int\limits_{\partial M} \mathrm{In}^*(\omega). \tag{3.12}$$

Bizonyítás. Az integrált kompakt tartójú maximális formákra definiáltuk. Ha $\omega \in \Omega_c^{n-1}(M)$, akkor $\mathrm{In}^*(\omega) \in \Omega_c^{n-1}(\partial M)$ és $\mathrm{d}\omega \in \Omega_c^n(M)$, ezért a tételben megjelölt integrálok értelmesek.

Legyen $\{f_i | i \in \mathbb{N}\}$ az M egy $\mathcal{U} = \{U_i | i \in \mathbb{N}\}$ lokálisan véges nyílt fedésének alárendelt sima egységosztás úgy, hogy tetszőleges $i \in \mathbb{N}$ esetén létezzen egy $V_i \in \mathbb{R}_+^n$ nyílt halmaz és egy $\chi : V_i \to U_i$ diffeomorf szürjekció. A 3.5 tétel értelmében írhatjuk a következőket.

$$\int\limits_M \mathrm{d}\omega = \int\limits_M \mathrm{d}\left(\sum_{i\in\mathbb{N}} f_i\omega\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \int\limits_{U_i} \mathrm{d}(f_i\omega) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \int\limits_{V_i} \chi_i^* \mathrm{d}(f_i\omega) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \int\limits_{V_i} \mathrm{d}(\chi_i^* f_i\omega) \tag{3.13}$$

Vizsgáljuk meg a kapott összeg egy tagját. A $V_i \in \mathbb{R}_+^n$ nyílt halmaz $\mathbb{R}_+^n$ egy részsokasága, melyen egyelemű atlasz az $\mathbb{R}_+^n$ kanonikus koordinátafüggvényeinek V_i-re való megszorítása. Igaz továbbá, hogy $\chi_i^* f_i \omega \in \Omega_c^{n-1}(V_i)$, ezért

[8]Egy ilyen $\Phi : V \to U$ diffeomorfizmusról akkor mondjuk, hogy irányítástartó, ha a neki megfelelő Φ^* tenzorvisszahúzás el nem tűnő maximális formát el nem tűnő maximális formába visz.

[9]Nem ez a legáltalánosabb formája a Stokes tételnek, létezik ennél sokkal általánosabb alak is. Céljainknak azoban ez az alak is megfelel és a bizonyítása sem túl összetett ahhoz, hogy itt ismertessük.

$$(\exists \left\{ \Upsilon_{(i)j} \in \mathcal{F}_c(V_i) | j \in \{1, \ldots, n-1\} \right\}) \quad \chi_i^* f_i \omega = \sum_{j=1}^{n} \Upsilon_{(i)j} \cdot \bigwedge_{k=1, k \neq j}^{n} \mathrm{d}x^k. \tag{3.14}$$

$$\mathrm{d}(\chi_i^* f_i \omega) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{d}\Upsilon_{(i)j} \wedge \bigwedge_{k=1, k \neq j}^{n} \mathrm{d}x^k = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{\partial \Upsilon_{(i)j}}{\partial x^j} \bigwedge_{k=1}^{n} \mathrm{d}x^k \tag{3.15}$$

$$\int_{V_i} \mathrm{d}(\chi_i^* f_i \omega) = \int_{V_i} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{\partial \Upsilon_{(i)j}}{\partial x^j} \bigwedge_{k=1}^{n} \mathrm{d}x^k =$$

$$= \int_{V_i} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{\partial \Upsilon_{(i)j}}{\partial x^j} \, \mathrm{d}\lambda^n = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \int_{V_i} \frac{\partial \Upsilon_{(i)j}}{\partial x^j} \, \mathrm{d}\lambda^n \tag{3.16}$$

Számítsuk ki a kapott összeg egyik tagjában szereplő integrált. Tudjuk, hogy $\Upsilon_{(i)j} \in \mathcal{F}_c(V_i)$, ezért $\frac{\partial \Upsilon_{(i)j}}{\partial x^j} \in \mathcal{F}_c(V_i)$. A Heine-Borel tétel értelmében igaz, hogy $\mathbb{R}_+^n$-ban egy halmaz pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt. Következésképpen $\operatorname{supp}\left(\frac{\partial \Upsilon_{(i)j}}{\partial x^j}\right)$ belefoglalható egy $\mathbb{R}_+^n$-beli elég nagy téglába. Jelölje ezt a téglát

$$I_{(i)j} := \prod_{k=1}^{n} [a_{(i)j}^k, b_{(i)j}^k].$$

A Fubini tétel feltételei teljesülnek, ezért az n-dimenziós Lebesgue mérték szerinti integrált szukcesszívan számolhatjuk.

$$\int_{V_i} \frac{\partial \Upsilon_{(i)j}}{\partial x^j} \, \mathrm{d}\lambda^n = \int_{I_{(i)j}} \frac{\partial \Upsilon_{(i)j}}{\partial x^j} \, \mathrm{d}\lambda^n = \int_{\prod_{k=1, k \neq j}^{n} [a_{(i)j}^k, b_{(i)j}^k]} \int_{[a_{(i)j}^j, b_{(i)j}^j]} \frac{\partial \Upsilon_{(i)j}}{\partial x^j} \, \mathrm{d}\lambda \, \mathrm{d}\lambda^{n-1} =$$

$$= \int_{\prod_{k=1, k \neq j}^{n} [a_{(i)j}^k, b_{(i)j}^k]} \Upsilon_{(i)j}\big|_{\{x^j = b_{(i)j}^j\}} - \Upsilon_{(i)j}\big|_{\{x^j = a_{(i)j}^j\}} \, \mathrm{d}\lambda^{n-1} \tag{3.17}$$

Ha $\partial V_i := V_i \cap \partial \mathbb{R}_+^n = \emptyset$, akkor $\Upsilon_{(i)j}\big|_{\{x^j = b_{(i)j}^j\}} = 0$ és $\Upsilon_{(i)j}\big|_{\{x^j = a_{(i)j}^j\}} = 0$, így az (3.17) kifejezés értéke 0. Ellenben ha $\partial V_i \neq \emptyset$, akkor $\mathbb{R}_+^n$ definíciója miatt csupán $j = 1$ esetén kapunk nem nulla értéket. Jelölje $\tilde{\mathrm{In}} : \partial \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+^n$ a tartalmazás által definiált injekciót.

$$\partial V_i \neq \emptyset \Rightarrow \int_{V_i} \frac{\partial \Upsilon_{(i)1}}{\partial x^1} \, \mathrm{d}\lambda^n = \int_{\prod_{k=1, k \neq 1}^{n} [a_{(i)1}^k, b_{(i)1}^k]} - \Upsilon_{(i)1}\big|_{\{x^1 = 0\}} \, \mathrm{d}\lambda^{n-1} = \int_{\partial V_i} \tilde{\mathrm{In}}^* \chi_i^* f_i \omega \tag{3.18}$$

Ebből (3.16)-re azt kapjuk, hogy

$$\int_{V_i} \mathrm{d}(\chi_i^* f_i \omega) = \int_{\partial V_i} \tilde{\mathrm{In}}^* \chi_i^* f_i \omega = \int_{\partial V_i} \left(\chi_i \circ \tilde{\mathrm{In}} \right)^* f_i \omega \tag{3.19}$$

Legyen $\mathcal{U}' = \{\partial U_i := U_i \cap \partial M | U_i \cap \partial M \neq \emptyset,\ i \in \mathbb{N}\}$ a ∂M egy lokálisan véges nyílt fedése. A $\{(f_i \circ \mathrm{In})^* | i \in \mathbb{N}\}$ függvényrendszer az $\mathcal{U}'$ fedésnek alárendelt sima egységosztás ∂M-en, ezért igaz, hogy

$$\int\limits_M \mathrm{d}\omega = \sum_{i \in \mathbb{N}} \int\limits_{V_i} \mathrm{d}(\chi_i^* f_i \omega) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \int\limits_{\partial V_i} \left(\chi_i \circ \tilde{\mathrm{In}}\right)^* f_i \omega = \sum_{i \in \mathbb{N}} \int\limits_{\mathrm{In}(\partial U_i)} f_i \omega =$$

$$= \sum_{i \in \mathbb{N}} \int\limits_{\partial U_i} (f_i \circ \mathrm{In})^* \omega = \int\limits_{\partial M} \mathrm{In}^*(\omega) \quad (3.20)$$

Q.E.D.

4. Komplex vektornyalábok általános elméletének elemei

4.1. A struktúracsoport

Ahogyan a sokaság a lineáris tér általánosításának tekinthető, úgy a vektornyaláb fogalom a Descartes-szorzat megfelelő általánosítása. Vektornyalábokra gondolhatunk úgy is, mint egy sokasággal parametrizált vektortér seregre.

4.1. Definíció. *Legyen M egy sokaság, E pedig egy összefüggő Hausdorff tér, F pedig legyen egy k dimenziós vektortér. Továbbá adott egy $\pi : E \to M$ egy folytonos szürjekció. Az (E, M, F, π) négyest F fibrumú, k rangú M feletti* vektornyalábnak *nevezzük, ha az alábbiak teljesülnek:*

1. *Az M sokaság egy tetszőleges p pontját véve $\pi^{-1}(p) \subset E$ egy F-el izomorf vektortér, amit p feletti* fibrumnak *hívunk.*
2. *Minden M-beli p pontnak van egy $U \subseteq M$ környezete, mely felett a nyaláb* triviális. *Ez alatt azt értjük, hogy adott egy $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times F$ homeomorfizmus, amely az alábbi diagramot kommutatívvá teszi. A φ homeomorfizmust az E nyaláb U feletti*

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times F \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\
& U &
\end{tikzcd}$$

lokális trivializációjának *nevezzük.*

3. *Ha tekintjük az (U, φ) és a (V, ψ) lokális trivializációkat, melyekre $U \cap V \neq \emptyset$, akkor a $\psi \circ \varphi^{-1} : U \cap V \times F \to U \cap V \times F$ leképezések tetszőleges $p \in U \cap V$ esetén a $p \times F \cong F$ halmazra megszorítva viselkedjenek úgy, mint $F \to F$ lineáris leképezések, p-ben pedig simák legyenek.*

E-t a nyaláb totális terének, *M-et* bázis sokaságnak, *F-et* fibrum típusnak *π-t pedig a* nyaláb projekciójának *nevezzük nevezzük.*

Vektornyalábokra gyakran csak a totális terükön keresztül fogunk hivatkozni, amennyiben az alapsokaságot ismerjük. Innentől fogva a tárgyalt vektornyalábok fibrum típusa minden esetben —ha nem mondunk mást— a nyaláb rangjával megegyező dimenziójú $\mathbb{C}^n$ vektortér lesz.

4.2. Definíció. *Tekintsünk egy $(E, M, \mathbb{C}^k, \pi)$ vektornyalábot. Legyenek (U_i, φ_i) és (U_j, φ_j) az E nyaláb lokális trivializációi. A 4.1. definíció 3. pontja értelmében ha $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, akkor értelmezhető a*

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \to GL(k, \mathbb{C}) \quad g_{ij}(p) := \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}\big|_{p \times \mathbb{C}^k} \tag{4.1}$$

leképezés. A g_{ij} leképezést az (U_i, φ_i) és (U_j, φ_j) lokális trivializációkhoz tartozó átmenet függvénynek *nevezzük. Az E nyaláb lokális trivializáció párjaihoz rendelhető átmenet függvények értékkészletei a $GL(k, \mathbb{C})$ csoport egy G részcsoportját generálják. A G csoportot az E nyaláb* struktúracsoportjának *hívjuk.*

Az átmenet függvényekről belátható, hogy teljesítik az alábbi ún. Čech kociklus feltételeket.

$$g_{ii}(x) = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^k} \tag{4.2}$$

$$g_{ij}(x) \circ g_{ji}(x) = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^k} \tag{4.3}$$

$$g_{ij}(x) \circ g_{jk}(x) \circ g_{ki}(x) = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^k} \tag{4.4}$$

4.1. Állítás. *Amennyiben veszünk egy M sokaságot és egy F k-dimenziós komplex test feletti vektorteret, továbbá M-nek adott egy $\{U_i | i \in I\}$ nyílt halmazokkal való befedése és adottak*

$$\{g_{ij} : U_i \cap U_j \to GL(k, \mathbb{C}) | i, j \in I\}$$

függvények, melyek teljesítik a Čech kociklus feltételeket, akkor izomorfizmus erejéig (ld.: 4.3. definíció) megadható egy (E, M, F, π) k-rangú vektornyaláb, amely az $\{U_i | i \in I\}$ fedőrendszer elemei felett lokálisan triviális és átmenet függvényei éppen a fenti g_{ij} függvények.

Bizonyítás. (vázlat) A konstrukció lépései a következők:

1. Képezzük az $\{U_i \times \mathbb{C}^k | i \in I\}$ halmazrendszert és az $\{f_{ij} | i, j \in I\}$ függvényrendszert, ahol

   $$(\forall i, j \in I)\, f_{ij} : U_i \cap U_j \times \mathbb{C}^k \to U_i \cap U_j \times \mathbb{C}^k \quad (p, v) \mapsto f_{ij}(p, v) = (p, g_{ij}(p)(v)).$$

2. Bevezetünk egy relációt az $\bigcup\limits_{i \in I} \left(U_i \times \mathbb{C}^k\right)$ halmazon a következőképpen:

   $$(p_1, v_1) \sim (p_2, v_2) \Leftrightarrow (\exists i, j) \in I \quad (p_2, v_2) = f_{ij}(p_1, v_1)$$

3. A Čech kociklus feltételek teljesülése miatt a $\sim$ reláció egy ekvivalencia reláció, ezért képezhető az $E := \bigcup\limits_{i \in I} \left(U_i \times \mathbb{C}^k\right) \Big/ \sim$ faktortér.

4. Jelölje $[x] \in E$ az $x \in \bigcup\limits_{i \in I} \left(U_i \times \mathbb{C}^k\right)$ elem által reprezentált ekvivalencia osztályt. Legyen a nyaláb projekciója a $\pi : E \to M\ [x] \mapsto \pi([x]) := \mathrm{pr}_1(x)$ leképezés.

Le kell még ellenőrizni, hogy π jól definiált, azaz reprezentáns választásától független, továbbá valóban egy vektornyalábot kaptunk, melynek g_{ij}-k az átmenet függvényei és a kapott nyaláb izomorfizmus erejéig egyértelmű. A részletek kidolgozását az Olvasóra bízzuk.

Q.E.D.

Általában igaz, hogy a struktúracsoportra tett megszorításokat a vektornyalábon új struktúrák megjelenése kíséri. Ha egy k rangú vektornyaláb struktúracsoportját csak pozitív determinánsú lineáris leképezések alkotják, akkor a nyaláb irányítható. Ha pedig a struktúracsoport az $U(k)$ unitér csoport, akkor a nyalábon létezik fibrumonként pontonként változó Hermite skalárszorzás.

4.1. Példa. Az egyik legfontosabb példa vektornyalábra az érintőnyaláb. A $\pi : TM \to M$ $T_pM \ni v \mapsto p$ módon értelmezett projekcióval TM egy M feletti $\dim(M)$ rangú vektornyalábbá tehető. Jogosan vetődik fel a kérdés, hogy az érintőnyaláb mivel több, mint egy közönséges vektornyaláb a sokaság felett, melynek rangja a sokaság dimenziójával egyezik meg. A válasz az, hogy az érntőnyaláb esetén a nyaláb lokális trivializációit a bázissokaság atlaszai alkotják.

További példák vektornyalábokra:

1. Egy (E, M, F, π) nyalábot triviális nyalábnak nevezünk, ha $E \cong M \times F$. Triviális nyalábra egy példa a newtoni téridő modell, melyben létezik abszolút idő és ennek megfelelően beszélhetünk arról, hogy két esemény egyidejű, de a nem azonos időben történt eseményekről nem tudjuk eldönteni, hogy egy helyen történtek-e. Az ennek megfelelő modell egy $\mathbb{R}$ bázisú (idő), $\mathbb{R}^3$ fibrumú triviális nyaláb.

2. Egy M sokaságot pontosan akkor hívunk parallelizálhatónak, ha az érintőnyalábja triviális nyaláb. A 2.3. állítás következményeként beláttuk, hogy tetszőleges Lie-csoport parallelizálható és a gömbök közül csupán S^1, S^3 és S^7 parallelizálható.

3. Egy (E, M, F, π) nyalábot vonalnyalábnak nevezünk, amennyiben $\dim(F) = 1$. A szokásos példa vonalnyalábra a henger és a Möbius szalag. Mindkettő egy $\mathbb{R}$ fibrumú, S^1 bázissokaságú nyaláb, a henger egy triviális nyaláb, a Möbius szalag pedig nyilvánvalóan nem az.

A lineáris albegrából ismert vektortérműveleteket fibrumonként vett műveletekként kiterjeszthetjük vektornyalábokra is és az eredmény szintén egy vektornyaláb lesz. Képezhetjük egy nyaláb duális nyalábját, nyalábok direkt összegét, direkt szorzatát stb.. A duális tér képzés funktorialitása miatt a duális nyalábot trivializáló környezetek megegyeznek az eredeti nyalábot trivializáló környezetekkel.

4.3. Definíció. *Legyenek adottak az (E_1, M_1, F_1, π_1) és a (E_2, M_2, F_2, π_2) vektornyalábok. Az (f, g) függvénypárt az E_1 és E_2 nyalábok közti* morfizmusnak *nevezzük, ha az $f : E_1 \to E_2$ és a $g : M_1 \to M_2$ folytonos függvényekre igazak az alábbiak:*

1. *Teteszőleges $p \in M_1$ esetén $f|_{\pi_1^{-1}(p)} : \pi_1^{-1}(p) \to \pi_2^{-1}(g(p))$ egy F_1-ről F_2-be ható lineáris leképezés.*

2. *A következő diagram kommutatív.*

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{f} & E_2 \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_2} \\ M_1 & \xrightarrow{g} & M_2 \end{array}$$

Amennyiben a függvénypár mindkét tagja bijekció az E_1 és E_2 nyalábokat izomorfaknak mondjuk. Az (f, g) függvénypár által meghatározott vektornyaláb morfizmust az f leképezés az előbbi diagram kommutativitása miatt egyedül meghatározza.

4.4. Definíció. *Legyen (E, M, F, π) egy vektornyaláb és $N \subseteq M$ egy részsokaság. Az E-nyaláb N-re való* megszorítása *alatt a $(\pi^{-1}(N), N, F, \pi|_{\pi^{-1}(N)})$ nyalábot értjük. Az E nyaláb N-re vett megszorítását $E|_N$-el fogjuk jelölni.*

Ellenőrizhető, hogy ha egy $k \in \mathbb{N}$ rangú vektornyaláb bázissokasága egy $n \in \mathbb{N}$ dimenziós sokaság, akkor a nyaláb totális tere is egy sokaság, melynek dimenziója $n + k$. Az előbbi megállapítás értelmében értelmezhetők a bázissokaságról a totális térbe képző függvények deriváltjai.

4.5. Definíció. *Az (E, M, F, π) vektornyaláb egy* sima szelése *alatt egy olyan $s : M \to E$ sima függvényt értünk, melyre $\pi \circ s = \mathrm{Id}_M$ (azaz s minden pontban a fibrumban veszi fel értékét). Az (E, M, F, π) vektornyaláb sima szeléseinek halmazát jelölje $\Gamma(M, E)$.*

A sima szelések a többváltozós analízis vektor értékű függvényeinek természetes általánosításai sokaságokra. Sima szelés mindig létezik, ugyanis az azonosan nullvektort felvelő szelés sima. Ha $U \subseteq M$ nyílt halmaz, akkor az U feletti szelések a pontonkénti műveletekkel vektorteret alkotnak a fibrum alapteste felett és modulust alkotnak $\mathcal{F}(U)$ felett.

4.6. Definíció. *Legyen (E, M, F, π) egy vektornyaláb, N pedig egy sokaság és $\Phi : N \to M$ egy folytonos leképezés. A $\Phi^*E := \{(p, e) \in N \times E | \Phi(p) = \pi(e)\}$ halmazt lássuk el az $N \times E$-től örökölt altér topológiával és tekintsük a $\Phi^*\pi : \Phi^*E \to N$, $\Phi^*\pi := \mathrm{pr}_1$ leképezést. Ellenőrizhető, hogy ezzel az eljárással egy $(\Phi^*E, N, F, \Phi^*\pi)$ vektornyalábot sikerült legyártanunk. A kapott nyalábot az E vektornyaláb Φ általi N-re való* visszahúzottjának *nevezzük.*

A nyalábvisszahúzás tulajdonképpen egy speciális vektornyaláb morfizmus, ezt az észrevételt az 5.2 tétel bizonyításánál fogjuk használni.

4.2. Megjegyzés. Legyen E egy vektornyaláb az M sokaság felett, N pedig szintén legyen egy sokaság. Amennyiben a $\Phi : N \to M$ leképezés sima értelmezhetjük az $s \in \Gamma(M, E)$ szelés visszahúzottját $\Phi^* s := s \circ \Phi$ módon. A nyalábvisszahúzás definíciójának felhasználásával azonnal láthatjuk, hogy $\Phi^* s \in \Gamma(N, \Phi^* E)$.

A sokaságon adott tenzormezőkre a sima szelések segítségével a 2.11. definícióval ekvivalens új definíciót adhatunk. Ez most puszta formalitásnak tűnhet, de amikor a 5.2. fejezetben a vektor értékű külső formákat bevezetjük hasznát fogjuk venni ennek a szemléletnek.

4.7. Definíció. *Az M sokaságon értelmezett (r, s) típusú sima tenzormező alatt egy $\chi \in \Gamma(M, T^{(r,s)}M)$ sima szelést értünk. Ennek megfelelően a $\Gamma(M, TM)$ sima széléseket vektormezőnek, a $\Gamma(M, T^*M)$ sima széléseket pedig elsőrendű differenciálformának hívjuk.*

4.2. Differenciálgeometria vektornyalábokon

Legyen M sokaság, E pedig egy M feletti r rangú vektornyaláb. Tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ esetén beszélhetünk k-ad rendű vektor értékű differenciálformákról, melyeket

$$\Omega^k(M, E) := \Omega^k(M) \otimes \Gamma(M, E)$$

módon definiálunk, ahol a tenzorszorzatot, mint $\mathcal{F}(M) = \Omega^0(M)$ feletti modulusok tenzorszorzatát értjük. Teljesen hasonló módon definiálhatjuk az E értékű differenciálformák terét az $\Omega^*(M, E) := \Omega^*(M) \otimes \Gamma(M, E)$ formula segítségével.

Láthattuk, hogy a valós értékű differenciálformák algebráján ($\Omega^*(M)$) egyértelműen megadható egy $\mathrm{d} : \Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$ külső deriválás, ami $\Omega^*(M)$ egy endomorfizmusa. Természetesen vetődik fel a kérdés, hogy létezik-e külső deriváláshoz hasonló művelet a vektor értékű differenciálformák modulusán. A válasz persze igen, csak tudnunk kell, hogy mit értsünk hasonló alatt. Mutatunk egy naiv konstrukciót E értékű differenciálformák modulusán külső deriválás bevezetésére, amely persze nem fog megfelelni követelményeinknek, de segítségével be tudunk majd vezetni $\Omega^*(M, E)$-n egy értelmes külső deriválást, amit majd kovariáns deriválásnak vagy konnexiónak fogunk hívni.

Ha E triviális $U \subseteq M$ felett, akkor tetszőleges $s \in \Omega^k(M, E)$ esetén $s|_U$ reprezentálható[10] $s_U = s_U^i e_i$ módon, ahol $\{e_i | i \in \{1, \ldots, k\}\}$ $\mathbb{C}^k$ egy bázisa és $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$-ra $s_U^i \in \Omega^k(M)$. Természetesen adódik, hogy a bevezetendő külső deriválás egyezzen meg U-n a koordinátánként vett szokásos külső deriválással.

$$\mathrm{d} : \Omega(U, E) \to \Omega(U, E) \quad s_U^i e_i \mapsto \mathrm{d}(s_U^i e_i) := \mathrm{d}(s_U^i) e_i \tag{4.5}$$

Kérdés már csak az, hogy a lokális trivializációkhoz tartozó külső deriválások összeillenek-e egy globális $\mathrm{d} : \Omega^*(M, E) \to \Omega^*(M, E)$ külső deriválássá.

[10] Nem írjuk ki a leképezést, ami a reprezentánst az absztrakt objektummal azonosítja és szóhasználatban sem teszünk mindig különbséget. A lokális trivializáció egy U fedőhalmazához tartozó reprezentánsokat U-val indexeljük.

Legyenek $U \subseteq M$ és $V \subseteq M$ olyanok, hogy felettük a nyaláb triviális, továbbá $U \cap V \neq \emptyset$. Legyen $g_{UV} : U \cap V \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ a megfelelő átmenet leképezés, melyről nyilvánvaló, hogy $g_{UV} \in \Gamma(U \cap V, \mathrm{Aut}(E)) \cong \Omega^0(U \cap V, \mathrm{Aut}(E))$ és $s_V = g_{UV} s_U$.

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(s_V|_{U\cap V}) = \mathrm{d}(g_{UV} s_U|_{U\cap V}) = \\ = (\mathrm{d}g_{UV}) s_U|_{U\cap V} + g_{UV}(\mathrm{d}s_U|_{U\cap V}) \neq g_{UV}(\mathrm{d}g_{VU} s_V|_{U\cap V})\end{aligned} \tag{4.6}$$

Azt várjuk el, hogy a vektor értékű differenciálformák külső deriváltjai is úgy transzformálódjanak, mint az eredeti differenciálformák. Olyan operációt kell tehát találnunk, ami a trivializáció választásától kanonikusan függ csak. Láthatóan a fenti konstrukció nem ilyen.

Az M sokaság feletti E vektornyaláb egy lokális trivializációjának fedőhalmazai legyenek az $\{U_i | i \in I\}$ halmazok. A keresendő $\nabla^E : \Omega^0(M, E) \to \Omega^1(M, E)$ konnexió lokális alakja egy U_i halmaz felett legyen ∇^{U_i}. Azt, hogy ∇^E ilyen lokális alakok gyűjteményeként előáll $\nabla^E = \{\nabla^{U_i}\}$ módon fogjuk jelölni. A ∇^E konnexiótól elvárjuk, hogy egy olyan $\mathbb{C}$-lineáris leképezés legyen, ami teljesíti a Leibnitz tulajdonságot, azaz deriváció.

$$(\forall f \in \mathcal{F}(M))(\forall s \in \Omega^0(M, E)) \quad \nabla^E(fs) = (\mathrm{d}f) \wedge s + f \nabla^E s \tag{4.7}$$

Valamint a lokális alakok az egymással átmetsző térképek felett kovariáns módon transzformálódnak egymásba. Azaz, ha $U_i \cap U_j \neq 0$ és g_{ij} a megfelelő átmenetleképezés, akkor

$$\nabla^{U_j} = g_{ij} \nabla^{U_i} g_{ij}^{-1} \tag{4.8}$$

Az (4.6) levezetésből látszik, hogy a reprezentánsokon vett komponensenkénti külső deriválás csak ez utóbbi tulajdonsággal nem rendelkezik, ugyanis az egyik trivializációról a másikra való áttérésnél egy Lie-algebra beli értéket felvevő 1-forma „hibádzik". Érdemes a kovariáns deriválás lokális alakját

$$\nabla^{U_i} = \mathrm{d}|_{U_i} + A^{U_i} \tag{4.9}$$

alakban keresni, ahol $\mathrm{d}|_{U_i}$ a szokásos U_i feletti reprezentánson a komponensenként vett külső derivált, $A^{U_i} : U_i \to \Omega^1(U_i, \mathrm{End}(E_{U_i}))$ pedig egy sima leképezés. Az (4.6) levezetés ∇^{U_i}-re történő megismétlésével kapjuk, hogy

$$\nabla^{U_j} = \mathrm{d} + \underbrace{g_{ij} \mathrm{d} g_{ij}^{-1} + g_{ij} A^{U_i} g_{ij}^{-1}}_{A^{U_j}}. \tag{4.10}$$

Innen kiolvasható az A^{U_i} leképezések transzformációs szabálya

$$A^{U_j} = g_{ij} \mathrm{d} g_{ij}^{-1} + g_{ij} A^{U_i} g_{ij}^{-1} \tag{4.11}$$

ami trivalizációk közötti, koordinátarendszer választástól független transzformációt ír le. Tudjuk már, hogy a bevezetendő kovariáns deriválásnak hogyan kell lokálisan viselkedni, de azt még nem, hogy egy tetszőleges komplex vektornyalábon létezik-e kovariáns deriválás.

4.1. Tétel. *Tetszőleges komplex vektornyalábon létezik kovariáns deriválás.*

Bizonyítás. Legyen E vektornyaláb az M sokaság felett. Legyen $\{(U_i, \psi_i)|i \in I\}$ az E nyaláb lokális trivializációja. Feltehető, hogy az $\{U_i|i \in I\}$ halmazrendszer lokálisan véges és vehetünk egy $\{\varphi_i|i \in I\}$ alárendelt sima egységosztást. Definiáljunk a következő leképezést.

$$\nabla^E : \Omega^0(M, E) \to \Omega^1(M, E) \quad \nabla^E := \sum_{i \in I} \varphi_i \psi_i^{-1} \circ \mathrm{d}(\psi_i \circ (.)) \tag{4.12}$$

Ahol a d a szokásos, reprezentánsokon értelmezett, koordinátánként vett külső deriválás. A fenti formulából egy $j \in I$ indexhez tartozó tagot leválasztva kapjuk az U_j feletti lokális alakot.

$$\nabla^{U_j} := \underbrace{\psi_j^{-1} \circ \mathrm{d}(\psi_j \circ (.))}_{\mathrm{d}|_{U_j}} + \underbrace{\sum_{i \in I \setminus \{j\}} \varphi_i \psi_i^{-1} \circ \mathrm{d}(\psi_i \circ (.))}_{A^{U_j}} \tag{4.13}$$

Ez éppen egybeesik a kovariáns deriválás (4.9) lokális alakjával. A $\mathbb{C}$-linearitás és a Leibnitz szabály teljesülése nyilvánvaló. Azt kell még megmutatni, hogy az A^{U_j} konnexió 1-formák (4.11) szerint transzformálódnak egymásba.

$$A^{U_j} = \sum_{l \in I \setminus \{j\}} \varphi_l \psi_l^{-1} \circ \mathrm{d}(\psi_l \circ (.)) \tag{4.14}$$

$$A^{U_i} = \sum_{l \in I \setminus \{i\}} \varphi_l \psi_l^{-1} \circ \mathrm{d}(\psi_l \circ (.)) \tag{4.15}$$

Figyelembe véve, hogy

$$\psi_i = g_{ij}^{-1} \circ \psi_j \tag{4.16}$$

írhatjuk a következőket.

$$\begin{aligned} &g_{ij}\mathrm{d}g_{ij}^{-1} + g_{ij}A^{U_i}g_{ij}^{-1} = \\ &= \psi_j^{-1} \circ g_{ij}\mathrm{d}g_{ij}^{-1} \circ (\psi_j \circ (.)) + \sum_{l \in I \setminus \{i\}} \varphi_l \psi_l^{-1} \circ \mathrm{d}(\psi_l \circ (.)) = \psi_i^{-1} \circ \mathrm{d}(\psi_i \circ (.)) + \\ &+ \sum_{l \in I \setminus \{i,j\}} \varphi_l \psi_l^{-1} \circ \mathrm{d}(\psi_l \circ (.)) = \sum_{l \in I \setminus \{j\}} \varphi_l \psi_l^{-1} \circ \mathrm{d}(\psi_l \circ (.)) = A^{U_j} \end{aligned} \tag{4.17}$$

Tehát a konstruált kovariáns deriválás konnexió 1-formái tényleg a (4.11) formula szerint transzformálódnak egymásba a lokális trivializációk közti átmenet során. Ezzel sikerült megadni egy kovariáns deriválást az E vektornyalábon.

Q.E.D.

4.8. Definíció. *Legyen (E, M, F, π) vektornyaláb és legyen E lokálisan triviális az $\{U_i\}_{i \in I}$ halmazrendszer tagjai felett. A $\nabla^E : \Omega^0(M, E) \to \Omega^1(M, E)$ leképezést* kovariáns deriválásnak *nevezzük, ha $\nabla^E = \{\nabla^{U_i}\}$ módon reprezentálódik a fedőhalmazok felett, ahol $\nabla^{U_i} = \mathrm{d}|_{U_i} + A^{U_i}$. Az $A^{U_i} : U_i \to \Omega^1(U_i, End(E|_{U_i}))$ sima leképezések pedig egy g_{ij} átmenet leképezés hatására (4.11) szerint transzformálódnak.*

A definícióban foglaltak maguk után vonják a ∇^E kovariáns deriválás $\mathbb{C}$-linearitását és deriváció voltát.

Legyen $\omega \in \Omega^*(M,E)$, $\theta \in \Omega^*(M)$, ekkor a

$$(\omega \in \Omega^p(M,E))\&(\theta \in \Omega^q(M)) \Rightarrow \mathrm{d}^{\nabla^E}(\omega \wedge \theta) := (\mathrm{d}^{\nabla^E}\omega) \wedge \theta + (-1)^p \omega \wedge \mathrm{d}\theta \qquad (4.18)$$

formula segítségével a $\nabla^E : \Omega^0(M,E) \to \Omega^1(M,E)$ kovariáns deriválás lineárisan kiterjszthető egy $\mathrm{d}^{\nabla^E} : \Omega^i(M,E) \to \Omega^{i+1}(M,E)$ vektornyalábokon értelmezett külső deriválássá, amit szintén konnexiónak fogunk hívni. A külső deriválással ellentétben egy d^{∇^E} konnexióra általában nem áll fenn a $\mathrm{d}^{\nabla^E} \circ \mathrm{d}^{\nabla^E} = 0$ egyenlőség. Triviális nyalábokon persze mindig vehető a triviális konnexió, melyre igaz, hogy $\mathrm{d}^{\nabla^E} \circ \mathrm{d}^{\nabla^E} = 0$, ezért várhatjuk, hogy az E nyaláb triviálistól való eltérése valamilyen értelemben $\mathrm{d}^{\nabla^E} \circ \mathrm{d}^{\nabla^E}$-ből képzett mennyiségekkel jellemezhető.

4.9. Definíció. *Legyen ∇^E egy kovariáns deriválás az M sokaság feletti E vektornyalábon. Ekkor a*

$$F^E := \mathrm{d}^{\nabla^E} \circ \mathrm{d}^{\nabla^E} : \Omega^0(M,E) \to \Omega^2(M,E)$$

leképezést a ∇^E kovariáns deriválás görbületi operátorának *nevezzük.*

A görbületi operátor lokális alakja rendkívül szemléletes jelentéssel bír. Pongyolán fogalmazva a következőről van szó. [11] Ha veszünk az M sokaságon egy olyan U_i koordinátakörnyezetet, melyre az $E|_{U_i}$ megszorított nyaláb triviális és veszünk egy $x : [0,1] \to U_i$ sima, zárt görbét, akkor

$$\nabla^E_{\dot{x}(t)} s \circ x(t) := (\nabla^E(s \circ x)(t))(\dot{x}(t)) = 0 \qquad (4.19)$$

$$s \circ x(0) = s_0 \qquad (4.20)$$

egy kezdetiérték probléma, melynek megoldása egy $s \in \Gamma(U_i, E_{U_i})$ sima szelés. Az $s \circ x$ leképezést az s_0 vektor x görbe menti párhuzamos eltolásának vagy parallel transzláltjának nevezzük. A fenti differenciálegyenlet rendszer közelítő megoldása Picard módszerrel előállítható. Az $s \circ x(1) \in E_{U_i}$ vektor másodrendű közelítésénél a másodrendű tag együtthatója éppen a görbületi operátor lokális alakja lesz.

Igaz, hogy az E vektornyalábon a konnexiók egy $\nabla^E \in \Omega^1(M, \mathrm{End}(E))$ feletti affin altérrel modellezhetők, a görbületi operátorok pedig az $\Omega^2(M, \mathrm{End}(E))$ tér elemeinek feleltethetők meg. A következő állításban a görbületi operátor legalapvetőbb tulajdonságait soroljuk fel.

4.2. Állítás. *Legyen $\nabla^E = \{\nabla^{U_i}\}$ egy kovariáns deriválás az M sokaság feletti E vektornyalábon. Jelölje F^E a ∇^E kovariáns deriválás görbületi operátorát. Ekkor igazak a következő kijelentések:*

1. *Ha $s \in \Omega^0(M,E)$ és $f \in \mathcal{F}(M)$, akkor fennáll, hogy*

$$fF^E s = F^E(fs).$$

[11] A pontos feltételek és bizonyítások megtalálhatók [3]-ban.

2. *(Cartan-egyenlet) Ha az E vektornyaláb egy $U_i \subseteq M$ halmaz felett lokálisan triviális és ∇^E lokális alakja az U_i felett $\nabla^{U_i} = \mathrm{d}|_{U_i} + A^{U_i}$, akkor F^E az U_i feletti lokálisan*

$$F^{U_i} = \mathrm{d}|_{U_i} A^{U_i} + A^{U_i} \wedge A^{U_i}$$

alakban áll elő.

3. *(Bianchi-azonosság)*

$$\mathrm{d}^{\nabla^E} \circ F^E = 0$$

Bizonyítás. 1. Legyen $s \in \Omega^0(M, E)$ és $f \in \mathcal{F}(M) = \Omega^0(M)$, ekkor a Leibnitz tulajdonság felhasználásával kapjuk az állítást.

$$\begin{aligned} F^E(fs) &:= \mathrm{d}^{\nabla^E} \circ \mathrm{d}^{\nabla^E}(fs) = \mathrm{d}^{\nabla^E}(\mathrm{d}f \wedge s + f\nabla^E s) = \\ &= (\mathrm{d} \circ \mathrm{d}f) \wedge s + \mathrm{d}f \wedge \nabla^E s + (-1)^1 \mathrm{d}f \wedge \nabla^E s + f\mathrm{d}^{\nabla^E} \circ \mathrm{d}^{\nabla^E} s = fF^E(s) \end{aligned} \quad (4.21)$$

2. Legyen $s \in \Omega^0(M, E)$, ekkor F^{U_i} s-re való hatását kiírva adódik az állítás.

$$\begin{aligned} F^{U_i} s &= \mathrm{d}^{\nabla^{U_i}} \circ \mathrm{d}^{\nabla^{U_i}}(s) = \mathrm{d}^{\nabla^{U_i}}(\mathrm{d}|_{U_i} s + A^{U_i} s) = \\ &= \mathrm{d}|_{U_i} \circ \mathrm{d}|_{U_i} s + (\mathrm{d}|_{U_i} A^{U_i})s - A^{U_i}(\mathrm{d}|_{U_i} s) + A^{U_i}(\mathrm{d}|_{U_i} s) + (A^{U_i} \wedge A^{U_i})s = \\ &= (\mathrm{d}|_{U_i} A^{U_i})s + (A^{U_i} \wedge A^{U_i})s \end{aligned} \quad (4.22)$$

3. A globális alak helyett a vele ekvivalens

$$\mathrm{d}|_{U_i} F^{U_i} + A^{U_i} \wedge F^{U_i} - F^{U_i} \wedge A^{U_i} = 0$$

lokális alakot fogjuk igazolni. A görbületi operátor lokális formájának felhasználásával kapjuk az állítás bizonyítását.

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}|_{U_i} F^{U_i} + A^{U_i} \wedge F^{U_i} - F^{U_i} \wedge A^{U_i} = \\ &= (\mathrm{d}|_{U_i} A^{U_i}) \wedge A^{U_i} - A^{U_i} \wedge (\mathrm{d}|_{U_i} A^{U_i}) + A^{U_i} \wedge F^{U_i} - F^{U_i} \wedge A^{U_i} = \\ &= (F^{U_i} - A^{U_i} \wedge A^{U_i}) \wedge A^{U_i} - A^{U_i} \wedge (F^{U_i} - A^{U_i} \wedge A^{U_i}) + A^{U_i} \wedge F^{U_i} - F^{U_i} \wedge A^{U_i} = 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

Q.E.D.

4.3. Karakterisztikus osztályok reprezentációja, Chern-Weil elmélet

A 3.2 fejezetben megmutattuk, hogy kohomológia csoportok segítségével lehet sokaságok feletti parciális differenciálegyenletek megoldhatóságát jellemezni. Ebben a kontextusban a kohomológia csoportok „akadály-tér” szerepét játszották. Ebben a fejezetben fény derül arra, hogy a bázis sokaság bizonyos kohomológia csoportjai segítségével osztályozni lehet a sokaság feletti komplex vektornyalábokat.

A karakterisztikus osztályok a nyaláb globális invariánsai, melyek a nyaláb lokális szorzat struktúrától való eltérését mérik. Látni fogjuk, hogy a karakterisztikus osztályok a bázis sokaság kohomológia tereivel reprezentáhatók. A Chern-Weil elméletben speciális karakterisztikus osztályokat rendelünk komplex unitér vektornyalábokhoz, amelyeket Chern osztályoknak hívunk.

Ez a fejezet kisebb kiegészítésektől eltekintve lényegében a [11] cikk egy részét dolgozza fel, amely egy összefoglaló mű. A karakterisztikus osztályok elméletének mélyebb megértése érdekében ajánlott fellapozni a [6] könyvet.

Legyen E vektornyaláb az M sokaság felett és legyen $A \in \Omega^0(M, \mathrm{End}(E))$. Az A nulla forma az $\mathrm{End}(E)$ vektornyaláb egy sima szelése, tehát M minden pontjában egy lineáris leképezéssel reprezentálható. Vehetjük pontonként A fibrumonkénti nyomát, amit $\mathrm{tr}A$-val jelölünk és nyilvánvalóan igaz, hogy $\mathrm{tr}A \in \Omega^0(M)$. A $\mathrm{tr} : \Omega^0(M, \mathrm{End}(E)) \to \Omega^0(M)$ leképezés kiterjeszthető egy $\mathrm{tr} : \Omega(M, \mathrm{End}(E)) \to \Omega^*(M)$ leképezéssé úgy, hogy $\omega \in \Omega^*(M)$ és $A \in \Omega^0(M, \mathrm{End}(E))$ esetén $\mathrm{tr}(\omega A) = \omega \mathrm{tr}A$. Az $\Omega^0(M, \mathrm{End}(E))$-n értelmezett Lie-zárójeles szorzás szintén kiterjed $\Omega(M, \mathrm{End}(E))$-re. Ha $\omega \in \Omega^k(M)$ $\eta \in \Omega^l(M)$ és $A, B \in \Omega^0(M, \mathrm{End}(E))$, akkor ωA és ηB Lie-zárójeles szorzatát a következőképpen értelmezzük.

$$[\omega A, \eta B] = (\omega A)(\eta B) - (-1)^{kl}(\eta B)(\omega A) = \omega \wedge \eta AB - (-1)^{kl}\eta \wedge \omega BA \tag{4.24}$$

4.3. Állítás. *Legyen (E, M, F, π) egy vektornyaláb. Ha adott egy ∇^E konnexió az E nyalábon, akkor tetszőleges $A \in \Omega(M, End(E))$ esetén igaz, hogy*

$$\mathrm{dtr}A = \mathrm{tr}[\nabla^E, A]. \tag{4.25}$$

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy ha $\tilde{A}, \tilde{B} \in \Omega(M, \mathrm{End}(E))$, akkor $\mathrm{tr}[\tilde{A}, \tilde{B}] = 0$. Ugyanis $\tilde{A}$ és $\tilde{B}$ előáll $\tilde{A} = \omega A$ és $\tilde{B} = \eta B$ módon, ahol $\omega \in \Omega^k(M)$ $\eta \in \Omega^l(M)$ és $A, B \in \Omega^0(M, \mathrm{End}(E))$.

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}[\tilde{A}, \tilde{B}] = \mathrm{tr}[\omega A, \eta B] = \omega \wedge \eta \mathrm{tr}(AB) - (-1)^{kl}\eta \wedge \omega \mathrm{tr}(BA) = \\ = \omega \wedge \eta \left(\mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(BA)\right) = 0\end{aligned} \tag{4.26}$$

Egy vektornyalábon a konnexiók egymástól csupán egy $\Omega^1(M, \mathrm{End}(E))$ formában különböznek, ezért az előbbi észrevételt felhasználva kapjuk, hogy a $\mathrm{tr}\left[\nabla^E, A\right]$ mennyiség független a ∇^E konnexió megválasztásától. Teteszőleges $p \in M$ pontnak létezik egy $U_p \subseteq M$ környezete, ami felett az E nyaláb triviális. A konnexióválasztás függetlensége miatt U_p környezet felett a tr $\left[\nabla^{U_p}, A\right]$ forma egybeesik a tr $\left[\mathrm{d}^{U_p}, A\right]$ formával, ahol d^{U_p} a triviális konnexió az $E|_{U_p}$ nyalábon. Lokálisan a következő egyenlőségek állnak fenn.

$$\mathrm{tr}\left[\nabla^E, A|_{U_p}\right] = \mathrm{tr}\left[\nabla^{U_p}, A|_{U_p}\right] = \mathrm{tr}\left[\mathrm{d}^{U_p}, A|_{U_p}\right] = \mathrm{d}\mathrm{tr}A|_{U_p} \tag{4.27}$$

Ezek a lokálisan igaz összefüggések pedig összeillenek az egész sokaságra globálisan fennálló a (4.25) formulává.

Q.E.D.

4.2. Tétel. *Legyen ∇^E egy konnexió az M feletti E vektornyalábon. Legyen F^E a ∇^E konnexió görbülete és legyen*

$$f(F^E) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (F^E)^k$$

egy komplex együtthatós hatványsor. Ekkor igaz, hogy a $\mathrm{tr}f(F^E)$ forma zárt. Amennyiben pedig adott egy másik konnexió ($\tilde{\nabla}^E$) is a nyalábon és a hozzá tartozó görbület ($\tilde{F}^E$), akkor a $\mathrm{tr}f(F^E) - \mathrm{tr}f(\tilde{F}^E)$ forma egzakt.

Bizonyítás. A tétel első fele a 4.3 állítás és a Bianchi azonosság következménye. A Bianchi azonosság értelmében $[\mathrm{d}^{\nabla^E}, (F^E)^k] = [\mathrm{d}^{\nabla^E}, (\mathrm{d}^{\nabla^E})^{2k}] = 0$. A 4.3 állításból pedig

$$\mathrm{d}\mathrm{tr}f(F^E) = \mathrm{tr}\left[\nabla^E, f(F^E)\right] = \mathrm{tr}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k [\nabla^E, (F^E)^n]\right) = 0 \tag{4.28}$$

következik. A tétel másik felének bizonyításához vezessük be ∇_t^E deformált konnexiót, ami a ∇^E és $\tilde{\nabla}^E$ konnexiók konvex kombinációja.

$$\forall t \in [0,1] \quad \nabla_t^E := (1-t)\nabla^E + t\tilde{\nabla}^E \tag{4.29}$$

Ekkor persze igaz, hogy

$$\frac{\mathrm{d}\nabla_t^E}{\mathrm{d}t} = \tilde{\nabla}^E - \nabla^E \in \Omega^1(M, \mathrm{End}(E)). \tag{4.30}$$

Tetszőleges $t \in [0,1]$ esetén F_t^E jelölje a ∇_t^E deformált konnexió görbületét.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{tr}f(F_t^E) &= \mathrm{tr}\left(\frac{\mathrm{d}F_t^E}{\mathrm{d}t} f'(F_t^E)\right) = \\ &= \mathrm{tr}\left(\frac{\mathrm{d}(\nabla_t^E)^2}{\mathrm{d}t} f'(F_t^E)\right) = \mathrm{tr}\left(\left[\nabla_t^E, \frac{\mathrm{d}\nabla_t^E}{\mathrm{d}t}\right] f'(F_t^E)\right) = \mathrm{tr}\left[\nabla_t^E, \frac{\mathrm{d}\nabla_t^E}{\mathrm{d}t} f'(F_t^E)\right]\end{aligned} \tag{4.31}$$

A 4.3 állítást ismét alkalmazva kapjuk, hogy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{tr}f(F_t^E) = \mathrm{d}\mathrm{tr}\left(\frac{\mathrm{d}\nabla_t^E}{\mathrm{d}t} f'(F_t^E)\right). \tag{4.32}$$

Ebből pedig

$$\mathrm{tr}f(F^E) - \mathrm{tr}f(\tilde{F}^E) = \left[\mathrm{tr}f(F_t^E)\right]_{t=0}^{t=1} = -\mathrm{d}\int_0^1 \mathrm{tr}\left(\frac{\mathrm{d}\nabla_t^E}{\mathrm{d}t} f'(F_t^E)\right) \mathrm{d}t \tag{4.33}$$

következik. Ez pedig definíció szerint azt jelenti, hogy a $\mathrm{tr}f(F^E) - \mathrm{tr}f(\tilde{F}^E)$ forma egzakt.

Q.E.D.

A $\mathrm{tr} f(R_E)$ forma tehát zárt és megfeleltethető egy $H_{\mathrm{dR}}(M,\mathbb{C})$-beli elemnek, ahol $H_{\mathrm{dR}}(M,\mathbb{C})$ az M komplex együtthatós kohomológia algebrája, a megfeleltetés pedig a konnexió választásától független.

4.10. Definíció. *Ha E egy M feletti vektornyaláb, akkor a $\mathrm{tr} f\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F^E\right)$ differenciálformát a ∇^E konnexió és az f hatványsor által az E nyalábhoz rendelt* karakterisztikus formának *nevezzük és $f(E,\nabla^E)$-vel jelöljük.*

A -konnexió megválasztásától független- $\mathrm{tr} f\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F^E\right)$ zárt formával reprezentált de Rham kohomológia osztályt az f hatványsor által az E nyalábhoz rendelt karakterisztikus osztálynak *nevezzük és $f(E)$-vel jelöljük.*

Jelölje az M sokaság feletti E vektornyalábhoz a ∇^E konnexió által rendelt totális Chern formát $c(E,\nabla^E)$, melyet a következőképpen definiálunk.

$$c(E,\nabla^E) = \det\left(I + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F^E\right) \in \Omega^*(M) \tag{4.34}$$

Ez a meghatározás a karakterisztikus forma definíciójához illeszkedik, ha felhasználjuk, hogy

$$\det\left(I + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F^E\right) = \exp\left(\mathrm{tr}\left[\log\left(I + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F^E\right)\right]\right). \tag{4.35}$$

A totális Chern forma $\Omega^*(M)$-ben

$$c(E,\nabla^E) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(E,\nabla^E) \tag{4.36}$$

módon bontható fel, ahol $\forall k \in \mathbb{N}$ $c_k(E,\nabla^E) \in \Omega^{2k}(M)$. A $c_k(E,\nabla^E)$ karakterisztikus formát k-adik Chern formának nevezzük, a hozzá rendelhető kohomológia csoportot pedig az E vektornyaláb k-adik Chern osztályának nevezzük és $c_k(E)$-vel jelöljük.

$$c_k(E) \in H^{2k}_{\mathrm{dR}}(M,\mathbb{C})$$

A következő tételben a Chern osztályok néhány alapvető tulajdonságát soroljuk fel.

4.3. Tétel. 1. *Legyenek M és N sokaságok, $\Phi : N \to M$ egy sima leképezés, E pedig vektornyaláb M felett. Ekkor $c(\Phi^*E) = \Phi^*c(E)$.*

2. *Ha E_1 és E_2 két vektornyaláb a M sokaság felett, akkor $c(E_1 \oplus E_2) = c(E_1)c(E_2)$.*

3. *Ha E egy $n \in \mathbb{N}$ rangú vektornyaláb, akkor a $(\forall i > n)$ $c_i(E) = 0$.*

4. *Ha E egy $n \in \mathbb{N}$ rangú vektornyaláb és megadható rajta seholsem nulla sima szelés, akkor $c_n(E) = 0$.*

5. Unitér vektornyalábok gömbök felett

5.1. Gömbök feletti komplex vektornyalábok homotopikus osztályozása

A differenciálgeometriai tárgyalásmódot követve az alfejezet tételeit sokaságokra látjuk be, azonban tudnunk kell, hogy az itt leírt tételek függetlenek a sima struktúrától és a topologikus tér lokális euklidesziségétől. A fejezet célja annak belátása, hogy az S^n feletti k rangú komplex vektornyalábokat a $\pi_{n-1}(U(k))$ homotópia csoport [12] osztályozza. Ezt az eredményt a vektornyalábok homotópia invariancia tételének egy alkalmazásaként fogjuk megkapni. A homotópia invariancia tétel általánosabb bizonyítása megtalálható [12]-ben.

5.1. Állítás. *Ha létezik olyan $x \in (0,1)$, hogy az $(E, M \times [0,1], F, \pi)$ n-rangú vektornyaláb $M \times [0,x]$-re és $M \times [x,1]$-re vett megszorítása egyaránt triviális, akkor az E nyaláb is triviális $M \times [0,1]$ felett.*

Bizonyítás. Jelölje α és β a trivializáló homeomorfizmusokat.

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) : E|_{M\times[0,x]} \to M \times [0,x] \times \mathbb{R}^n \tag{5.1}$$

$$\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) : E|_{M\times[x,1]} \to M \times [x,1] \times \mathbb{R}^n \tag{5.2}$$

Ha $\alpha|_{M\times\{x\}} = \beta|_{M\times\{x\}}$, akkor készen vagyunk, mert α és β az E nyaláb egy globális trivializációjává áll össze. Ha nem ez a helyzet, akkor az egyik lokális trivializációt ki kell cserélnünk egy másikra úgy, hogy az teljesítse a fenti tulajdonságot.

Ezt megtehetjük úgy, hogy először definiáljuk a

$$\gamma : M \times [x,1] \times \mathbb{R}^n \to M \times [x,1] \times \mathbb{R}^n \tag{5.3}$$

$$(p,t,v) \mapsto \gamma(p,t,v) := (p,t,\alpha_3 \circ \beta^{-1}(p,x,v)) \tag{5.4}$$

homeomorfizust, majd vesszük a $\beta' := \gamma \circ \beta$ leképezést, ami szintén homeomorfizmus. Ellenőrizzük, hogy β' rendelkezik a kívánt tulajdonsággal. Legyen $(p,x) \in M \times \{x\}$ és $v \in \pi^{-1}(p,x)$, ekkor igaz, hogy

$$\begin{aligned}\beta'(v) = \gamma \circ \beta(v) = (\beta_1(v), \beta_2(v), \alpha_3 \circ \beta^{-1} \circ \beta(e)) = \\ = (p, x, \alpha_3(e)) = (\alpha_1(e), \alpha_2(e), \alpha_3(e)) = \alpha(e).\end{aligned} \tag{5.5}$$

Q.E.D.

[12]Emlékeztetjük az Olvasót, hogy valamely $s \in S^{n-1}$ és $u \in U(k)$ rögzített pontok esetén az $\{S^{n-1}, s\}$ és $\{U(k), u\}$ topologikus párok közti folytonos leképezéseket homotopikus ekvivalencia erejéig tekintve a pontonkénti szorzással egy csoportot kapunk. Ellenőrizhető, hogy a kapott csoport ebben az esetben nem függ a bázispontok megválasztásától. Ezt a csoportot az $U(k)$ topologikus tér $n-1$. homotópia csoportjának nevezzük és $\pi_{n-1}(U(k))$-val jelöljük. Bővebben lásd.: [5].

5.2. Állítás. *Ha* $(E, M\times[0,1], F, \pi)$ *egy vektornyaláb, akkor megadható* M*-nek egy olyan* $\{U_i|i\in I\}$ *nyílt fedése, hogy a nyaláb az* $U_i\times[0,1]$ *alakú halmazok felett triviális legyen.*

Bizonyítás. Először rögzítsünk egy tetszőleges $p\in M$ pontot. Tetszőleges $x\in[0,1]$-re létezik a $(p,x)\in M\times[0,1]$ pontnak egy $V_p\times V_x$ környezete, amely felett a nyaláb triviális. Képezzük a $\mathcal{V} := \{V_x|x\in[0,1]\}$ nyílt halmazok alkotta halmazrendszert, melyről tudjuk, hogy befedi $[0,1]$-et. A $\mathcal{V}$ a $[0,1]$ kompakt intervallum egy nyílt fedése, kiválasztható belőle egy véges részfedés, amihez pedig hozzárendelhető a $[0,1]$ intervallum véges sok osztóponttal történő $0 = x_0 < x_1, \ldots, < x_n = 1$ felosztása úgy, hogy minden $[x_{i-1}, x_i]$ intervallum a véges fedőrendszer egy tagjába teljesen beleessen. A V_p halmaz választása nem független a V_x megválasztásától. A $V_x = [x_{i-1}, x_i]$-hez tartozó V_p halmazt jelölje $V_{p,i}$. Fontos, hogy a $V_{p,i}$ halmazok nem üres nyílt halmazok. Legyen

$$U_p := \bigcap_{i=1}^{n} V_{p,i}. \tag{5.6}$$

Az $\{U_p\times[x_{i-1},x_i]|i\in\{1,\ldots,n\}\}$ rendszer minden tagja felett triviális a nyaláb. Az 5.1. állítás ismételt alkalmazásával kapjuk, hogy a nyaláb triviális $U_p\times[0,1]$ felett is. Ezzel sikerült adnunk egy konstrukciót, mellyel minden $p\in M$ pont körül képezhetünk egy U_p nyílt környezetet úgy, hogy $U_p\times[0,1]$ felett a nyaláb triviális legyen. Az $\{U_p|p\in M\}$ nyílt fedés pedig eleget tesz az állításban foglaltaknak.

Q.E.D.

5.3. Állítás. *Az* $(E, M\times[0,1], F, \pi)$ *vektornyaláb* $M\times\{0\}$*-ra és* $M\times\{1\}$*-re vett megszorításai egymással izomorfak.*

Bizonyítás. Az 5.2. állítás miatt megadható M-nek egy olyan $\{U_i|i\in I\}$ nyílt fedése, hogy a nyaláb az $U_i\times[0,1]$ alakú halmazok felett triviális.

Először tételezzük fel M-ről, hogy kompakt sokaság. Az $\{U_i|i\in I\}$ nyílt fedésből kiválasztható egy $\{U_i\}_{i=1}^n$ véges részfedés és vehetünk egy alá rendelt folytonos egységosztást, legyen ez $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ és legyen $\psi_k := \sum_{i=1}^k \phi_i$. Ha $f: M\to\mathbb{R}$, akkor jelölje Γ_f az f gráfját, azaz a $\Gamma_f := \{(p, f(p))|p\in\mathrm{Dom}(f)\}$ halmazt. A $\varphi_k : \Gamma_{\psi_k}\to\Gamma_{\psi_{k-1}}$ $(p,\psi_k(p))\mapsto\varphi_k((p,\psi_k(p))) := (p,\psi_{k-1}(p))$ hozzárendelés homeomorfizmust ad meg Γ_{ψ_k} és $\Gamma_{\psi_{k-1}}$ között. Ennek segítségével vektornyaláb izomorfizmusokat adunk meg az E nyaláb $E_k := E|_{\Gamma_{\psi_k}}$ és E_{k-1} leszűkítései között. Ezek az izomorfizmusok két részből tevődnek össze. Egy tetszőleges $1\le k\le n$ indexet véve igaz, hogy $\mathrm{supp}(\phi_k)\subset U_k$, ezért igaz az is, hogy $\psi_k|_{M\setminus U_k} = \psi_{k-1}|_{M\setminus U_k}$, ebből pedig $E|_{\Gamma_{\psi_k|_{M\setminus U_k}}} = E|_{\Gamma_{\psi_{k-1}|_{M\setminus U_k}}}$ következik. A konstruálandó vektornyaláb izomorfizmus $E|_{\Gamma_{\psi_k|_{M\setminus U_k}}}$ és $E|_{\Gamma_{\psi_{k-1}|_{M\setminus U_k}}}$ között legyen az identitás. Az E nyalábról tudjuk, hogy triviális $U_k\times[0,1]$ felett és az is igaz, hogy $\Gamma_{\psi_k|_{U_k}}\subset U_k\times[0,1]$, ezért az alábbi nyaláb izomorfizmusok állnak fenn.

$$E_{\Gamma_{\psi_k|_{U_k}}} \cong \Gamma_{\psi_k|_{U_k}}\times\mathbb{R}^{\dim(F)} \cong \Gamma_{\psi_{k-1}|_{U_k}}\times\mathbb{R}^{\dim(F)} \cong E_{\Gamma_{\psi_{k-1}|_{U_k}}} \tag{5.7}$$

Az előbbi két izomorfizmus összeillesztésével kaptunk egy $\Phi_k : E_k\to E_{k-1}$ nyaláb izomorfizmust.

Az üres összeg definíció szerint 0, ezért $\psi_0 \equiv 0$, továbbá $\psi_n \equiv 1$, ezért $\Gamma|_{\psi_0} = M \times \{0\}$ és $\Gamma|_{\psi_1} = M \times \{1\}$. A $\Phi_1 \circ \ldots \circ \Phi_n : E_n \to E_0$ leképezés egy nyaláb izomorfizmus lesz az $E_n = E|_{M\times\{1\}}$ és $E_0 = E|_{M\times\{0\}}$ megszorított veltornyalábok közt. Ezzel az állítást kompakt esetre igazoltuk.

Ha az M sokaság nem kompakt, akkor is megadható egy $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ lokálisan véges megszámlálható fedése M-nek, hogy minden V_i olyan nyílt halmazok diszjunk uniójaként álljon elő, melyek külön-külön a lokális trivializációt alkotó valamely U_j halmazok részei. [13] Ebből az következik, hogy az E vektornyaláb a $V_i \times [0,1]$ alakú halmazok felett triviális. Az egységosztás tétel miatt vehetünk egy $\{\phi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, a $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ fedésnek alárendelt egységosztást és tekinthetjük a $\psi_n := \sum_{k=1}^{n} \phi_k$ függvényeket. Az $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ megszorított nyalábok és a $\{\Phi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ nyaláb izomorfizmusok konstrukciója elvégezhető a kompakt esetben leírtak szerint, majd vehető a $\Phi := \Phi_1 \circ \Phi_2 \circ \ldots$ leképezés, ami ha értelmes, akkor egy izomorfizmust ad meg az $E|_{M\times\{0\}}$ és az $E|_{M\times\{1\}}$ megszorított nyalábok között. Elég Φ-ről megmutatni, hogy jól definiált. Legyen $p \in M$, tetszőleges. Mivel a $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ halmazrendszer lokálisan véges létezik p-nek egy olyan U környezete, ami csak véges sok V_i-be metsz bele. Ekkor pedig U-n csak véges sok i-re teljesülhet, hogy $\phi_i \not\equiv 0$, ebből következik, hogy U_n csak véges sok ψ_j függvény különbözik egymástól. Ebből a Φ_i nyaláb izomorfizmusok konstrukciója miatt az következik, hogy U felett véges sok kivétellel a Φ_i izomorfizmusok az identitással esnek egybe, ezért a Φ-t definiáló végtelen függvénykompozíció lokálisan értelmes mindenütt. Ezzel az állítást nem kompakt esetre is igazoltuk.

Q.E.D.

5.1. Tétel. *Ha $f, g : N \to M$ homotóp folytonos leképezések az N és M sokaságok közt és tekintünk egy tetszőleges (E, M, F, π) vektornyalábot, akkor az f^*E és g^*E nyalábok izomorfak.*

Bizonyítás. Legyen $\Phi : N \times [0,1] \to M$ egy homotópia f és g között és vegyük a Φ^*E visszahúzott nyalábot. A homotópia definíciója szerint $\Phi|_{N\times\{0\}} = f$ és $\Phi|_{N\times\{1\}} = g$, ezért fennállnak az alábbi vektornyaláb izomorfizmusok:

$$f^*E \cong \Phi^*\, E|_{N\times\{0\}} \tag{5.8}$$

$$g^*E \cong \Phi^*\, E|_{N\times\{1\}} \tag{5.9}$$

Az 5.3. állítás értelmében a $\Phi^*\, E|_{N\times\{0\}}$ és $\Phi^*\, E|_{N\times\{1\}}$ nyalábok izomorfak egymással, amiből már következik f^*E és g^*E izomorfiája. Ezzel a vektornyalábok homotópia invariancia tételét igazoltuk.

Q.E.D.

5.1. Következmény. Ha az M és N sokaságok homotopikusan ekvivalensek, akkor az M és N feletti vektornyalábok izomorfizmus osztályai bijektíven megfeleltethetők egymásnak.

[13] Ez abból következik, hogy az M sokaság parakompakt. Bővebben lásd.:[12].

Az M és N sokaság homotopikus ekvivalenciája azt jelenti, hogy megadhatók olyan $f : M \to N$ és $g : N \to M$ folytonos leképezések, melyekre $f \circ g \sim \mathrm{Id}_M$ és $g \circ f \sim \mathrm{Id}_N$ fennáll. Az f^* nyalábvisszahúzás a nyalábok izomorfiáját megtartja, ezért elég azt látni, hogy g^* éppen f^* inverze. Mivel a nyalábvisszahúzás kontravariáns funktorialitással bír írható, hogy $f^* \circ g^* = (g \circ f)^*$ és $g^* \circ f^* = (f \circ g)^*$. A vektornyalábok homotópia invariancia tétele értelmében az $f \circ g$-vel visszahúzott nyalábok az Id_M-el visszahúzott nyalábokkal izomorfak. Hasonlóan a $g \circ f$-el visszahúzott nyalábok pedig izomorfak az Id_N-el visszahúzott nyalábokkal. Ezzel a következményt beláttuk. Speciális esetként adódik, hogy ha egy sokaság pontra húzható[14], akkor felette minden vektornyaláb triviális.

5.2. Tétel. *Az S^n feletti k-rangú komplex vektornyalábokat a $\pi_{n-1}(U(k))$ homotópia csoport osztályozza.*

Bizonyítás. Legyen E egy k-rangú komplex vektornyaláb S^n felett. Fedjük be S^n-t két zárt félgömbbel, melyek metszete éppen S^n egyenlítője. Jelölje ezeket a félgömböket S^n_+ és S^n_-. Szorítsuk meg E-t a félgömbökre, S^n felett izomorfizmus erejéig minden nyaláb megkapható a félgömbök feletti nyalábok megfelelő ragasztásával.

Az E k-rangú komplex vektornyaláb struktúracsoportja $\mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$, ám létezik minden komplex S^n feletti komplex vektornyalábhoz vele izomorf S^n feletti unitér vektornyaláb, ezért feltehető, hogy a struktúracsoport $U(k)$, a ragasztóleképezések pedig

$$g : S^{n-1} \to U(k)$$

alakú leképezések. Megmutatjuk, hogy ha $f \sim g$, akkor az f-el és g-vel történő ragasztások izomorf nyalábokat eredményeznek. Tekintsük a következő megfeleltetéseket:

$$E|_{S^{n-1} \cap S^n_-} \ni (p, v) \mapsto (p, f(p)(v)) \in E|_{S^{n-1} \cap S^n_+} \tag{5.10}$$

$$E|_{S^{n-1} \cap S^n_-} \ni (p, v) \mapsto (p, g(p)(v)) \in E|_{S^{n-1} \cap S^n_+} \tag{5.11}$$

A 4.6 definíciót közvetlenül követő megjegyzés értelmében mindkét megfeleltetés nyalábvisszahúzás $E|_{S^{n-1} \cap S^n_-}$-ról $E|_{S^{n-1} \cap S^n_+}$-ra. Az egyik zárt félgömb pereme feletti részét húzzuk vissza a nyalábnak a másik zárt félgömb peremére. Az 5.1. tétel értelmében $f \sim g$-ből következik, hogy az előbbi két visszahúzás izomorf nyalábokat ad meg. A félgömb pontra húzható, ezért az 5.1 következmény értelmében a félgömbökre megszorított nyalábok triviálisak, ezért az egyenlítő felett megadott nyaláb izomorfizmus triviálisan kiterjeszthető az S^n feletti nyalábok izomorfizmusává. Az f-el és g-vel ragsztott nyalábok között ezzel sikerült megadnunk egy izomorfizmust.

Tehát minden homotópia osztályhoz létezik egyértelműen egy vektornyaláb izomorfizmus osztály, ez pedig azt jelenti, hogy $\pi_{n-1}(U(k))$ osztályozza az S^n feletti k rangú komplex vektornyalábokat.

Q.E.D.

[14] Homotopikusan ekvivalens az egy pontból álló topologikus térrel ($*$-al).

5.2. Gömbök feletti komplex vektornyalábok kohomologikus osztályozása

A 4.3 fejezetben megmutattuk, hogy egy M sokaság feletti E vektornyaláb k. Chern osztálya ($c_k(E)$) egy $H^{2k}_{\mathrm{dR}}(M,\mathbb{C})$-beli elem. Bizonyítás nélkül[15] közöljük, hogy az S^{2n} gömb kohomológia csoportjai a $2n$-edik kohomológia csoport kivételével mind triviálisak, ezért egy S^{2n} feletti E vektornyaláb esetén csak a $c_n(E) \in H^{2n}_{\mathrm{dR}}(S^{2n},\mathbb{C})$ Chern osztály nem szükségképpen triviális. Azt szeretnénk kideríteni, hogy az n-edik Chern osztály milyen információt hordoz a nyalábbal kapcsolatban. Az n-edik Chern osztályról belátjuk, hogy osztályozza az S^{2n} feletti unitér vektornyalábokat. Vizsgálódásainkat S^{2n} felett kizárólag olyan $U(k)$ nyalábokon végezzük, melyekre $k \geq n$ teljesül.

Az 5.1 fejezetben beláttuk, hogy $\pi_{2n-1}(U(k))$ osztályozza az S^{2n} feletti k rangú unitér vektornyalábokat, ezért ahhoz, hogy igazoljuk azt, hogy az n. Chern osztályok is osztályozzák az S^{2n} feletti unitér vektornyalábokat elég megadnunk egy

$$B : \pi_{2n-1}(U(k)) \to H^{2n}_{\mathrm{dR}}(S^{2n},\mathbb{C}) \tag{5.12}$$

injektív leképezést.

Legyen E egy $k \geq n$ rangú unitér vektornyaláb S^{2n} felett, melyről már tudjuk, hogy az $E|_{S^{2n}_+}$ és $E|_{S^{2n}_-}$ nyalábok triviálisak. Legyen $g : S^{2n-1} \to U(k)$ az E nyaláb ragasztó leképezése[16]. Legyen adott egy $\nabla^{E(g)}$ konnexió az E nyalábon, melynek görbületi operátorát jelölje $F^{E(g)}$. Értelmezzük a fenti B leképezést a következő módon.

$$[g] \mapsto B[g] := \left[\frac{1}{(2\pi i)^n}\mathrm{tr}(F^{E(g)})^n\right] \tag{5.13}$$

leképezést. A $\mathrm{tr}(F^{E(g)})^n$ forma egy karakterisztikus forma, amiről a 4.3 fejezetben megmutattuk, hogy egy kohomológia osztályt határoz meg, mely független a $\nabla^{E(g)}$ konnexió megválasztásától, ezért csak az $E(g)$ nyalábtól, vagyis a $[g]$ homotópia osztálytól függhet. Erre most adunk egy másik bizonyítást is.

5.3. Tétel. *A B megfeleltetés független a konnexió megválasztásától.*

Bizonyítás. Ismét azt használjuk fel, hogy az integrál egy nem elfajuló lineáris funkcionál a kohomológia csoportokon. Belátjuk, hogy az

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{S^{2n}} \mathrm{tr}\bigwedge_{k=1}^{n} F^{E(g)} \in \mathbb{Z} \tag{5.14}$$

integrál kifejezhető az

$$\int\limits_{S^{2n-1}} \mathrm{tr}\bigwedge_{k=1}^{2n-1} g^{-1}\mathrm{d}g \tag{5.15}$$

[15] Az érdeklődő Olvasó a bizonyítást az [1] könyvben megtalálhatja.

[16] Ezt az $E(g)$ jelöléssel nyomatékosítjuk.

integrál segítségével. A $\mathrm{tr}(F^{E(g)})^n$ forma egzakt, ezért egy $CS_n(A)$-vel jelölt forma külső deriváltjaként áll elő, ahol A jelöli a konnexió 1-formát. A $CS_n(A)$ forma által reprezentált osztályokat másodlagos vagy Chern-Simons karakterisztikus osztályoknak hívják. A $CS_n(A)$ forma előállítására a [13, 14] művekben szereplő formulát használjuk fel [17].

$$CS_n(A) = \frac{1}{(n+1)!} \int_0^1 \mathrm{tr}\left(A \wedge (t\mathrm{d}A + t^2 A \wedge A)\right) \mathrm{d}t \tag{5.16}$$

Jelölje a $\nabla^{E(g)}$ konnexió lokális alakjait az egyik illetve másik fégömbön ∇^+ illetve ∇^-. Hasonlóan $F^{E(g)} = \{F^+, F^-\}$ módon realizálódjék a két félgömbön, továbbá érvényesek a következő lokális előállítások és transzformációs szabályok.

$$\mathrm{d}_+ + A^+ = \nabla^+ \tag{5.17}$$

$$\mathrm{d}_+ A^+ + A^+ \wedge A^+ = F^+ \tag{5.18}$$

$$g^{-1} A^+ g + g^{-1} \mathrm{d}_+ g = A^- \tag{5.19}$$

$$g^{-1} F^+ g = F^- \tag{5.20}$$

A Stokes tételt alkalmazva a félgömbökre figyelembe véve, hogy a felmetszés ellentétes irányítást indukál a két félgömb peremén kapjuk az alábbit.

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{S^{2n}} \mathrm{tr}(F^{E(g)})^{2n} &= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{S^{2n}_+} \mathrm{tr}(F^+)^{2n} + \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{S^{2n}_-} \mathrm{tr}(F^-)^{2n} = \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{S^{2n-1}} CS_n(A^+) - CS_n(A^-) \end{aligned} \tag{5.21}$$

Ugyancsak a [13, 14] művekben lelhető fel a Chern-Simons forma lokális alakjai közti átmenetet leíró formula.

$$CS_n(A^-) = CS_n(A^+) + \mathrm{d}\beta + (-1)^{n-1} \frac{n!(n-1)!}{(2n-1)!} \mathrm{tr}(g^{-1}\mathrm{d}g)^{2n-1} \tag{5.22}$$

A $\mathrm{d}\beta$ egzakt forma de Rham elméleti szempontból lényegtelen, integrálja nulla. Behelyettesítés után az 5.21 összefüggés az

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{S^{2n}} \mathrm{tr}(F^{E(g)})^{2n} = \frac{1}{(2\pi i)^n} (-1)^n \frac{n!(n-1)!}{(2n-1)!} \int_{S^{2n-1}} \mathrm{tr}(g^{-1}\mathrm{d}g)^{2n-1} \tag{5.23}$$

alakot ölti. Tehát a B leképezés valóban független a konnexió megválasztásától és csak az $E(g)$ nyalábtól, ezáltal csak a $[g]$ homotópia csoporttól függ.

Q.E.D.

[17] Megjegyezzük, hogy ez a formula az (4.33) formula speciális eseteként jön ki.

Ezzel beláttuk, hogy az n-edik Chern-osztályok is osztályozzák S^{2n} felett az unitér vektornyalábokat. Ha figyelembe vesszük, hogy

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{S^{2n}} \operatorname{tr} \bigwedge_{k=1}^{n} F^{E(g)} \in \mathbb{Z} \tag{5.24}$$

akkor kiderül, hogy a B leképezés a $H^{2n}_{\mathrm{dR}}(S^{2n}, \mathbb{R})$ vektortér egész koordinátájú rácspontjaira képezi le a $\pi_{2n-1}(U(k))$ hmotópia csoportot. A $H^{2n}_{\mathrm{dR}}(S^{2n}, \mathbb{R})$ vektortér egész koordinátájú rácspontjait jelölje $L(S^{2n})$. Nyilván igaz, hogy $L(S^{2n}) \cong \mathbb{Z}$ és az is igaz, hogy $\pi_{2n-1}(U(k)) \cong \mathbb{Z}$.

Tehát a B leképezés egy $B : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ beágyazásnak felel meg. A későbbiekben hasznos lenne megérteni, hogy n-től függően $\mathrm{Im}(B)$ hogy néz ki. Erről szól a Hirzebruch-Bott tétel, mely szerint

$$L(S^{2n}) \big/ \mathrm{Im}(B) \cong \mathbb{Z}_{(n-1)!} \tag{5.25}$$

egyenlőség áll fenn, amiből látható, hogy a kohomológia csoportok jóval gyengébb eszközök vektornyalábok osztályozására, mint a homotópia csoportok. Egy sokaság kohomológia tereit viszont könnyebb meghatározni, mint a homotópia csoportjait.

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék ezúttal köszönetet mondani témavezetőmnek, Dr. Etesi Gábornak a BME TTK Geometria Tanszék egyetemi docensének, hogy közreműködésével megismerkedhettem a modern differenciálgeometria alapvető módszereivel. Segítséget nyújtott a szakirodalom beszerzésében, igényeimnek megfelelően, folyamatosan ellátott tanácsokkal, útmutatásokkal, lektorálta a dolgozatomat (szakmai és irodalmi szempontból egyaránt). Kérdéseimre mindig örömmel és érthetően válaszolt, és mindig rendelkezésre állt amikor szükségem volt a segítségére.

Hivatkozások

[1] Szenthe János: *Bevezetés a sima sokaságok elméletébe*, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2002.

[2] Szilasi József: *Bevezetés a differenciálgeometriába*, Kossuth Egyetemi Kiadó, Debrecen, 1998.

[3] Etesi Gábor: *Tvisztorelmélet*, kézirat.

[4] Etesi Gábor: *Klasszikus mezőelméletek geometriája in Fizika és geometria (fizikus-matematikus nyári iskola, Óbánya, 1997) 46-86. oldal* MAΦHE kiadvány (2003).

[5] Raoul Bott: *Loring W. Tu, Differential Forms in Algebraic Topology*, Springer-Verlag.

[6] J.W. Milnor, J.D. Stasheff: *Characteristic Classes*, Princeton University Press & University of Tokyo Press (1974).

[7] V. I. Arnold: *A mechanika matematikai módszerei*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1985.

[8] Kristóf János: *A matematikai analízis elemei III.*, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2002.

[9] Chevalley, C., Eilenberg, S.: *Cohomology theory of Lie groups ang Lie algebras, Trans. Amer. Math. Soc.*, **63** (1948), 85-124.

[10] Hall, Brian C.: *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction*, Springer, 2003.

[11] Fei Han: *Chern-Weil theory and some results on classic genera*, 2003.

[12] Nikolai Nowaczyk: *Vector Bundles and Pullbacks*, November 2008.

[13] Jorge Zanelli: *Braz. J. Phys.* 30 (2000) 251-267.

[14] M. Nakahara, Adam Hilger: *Geometry, Topology and Physics*, New York, 1990.