

MAT B1 – III. vizsga – 1999. jan. 26. Név: _____ Gyakvez.: _____

1. Vezessük le az $\ln$ függvény deriváltjának ismeretében az $x \mapsto e^x$ függvény deriváltjára vonatkozó képletet! (3 pont)

6. Határozzuk meg az alábbi kifejezések értékét! (2+3+4 pont)

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n}$

2. Mutassuk meg, hogy ha van olyan $q \in (0, 1)$ szám, hogy az a_n sorozat minden tagjára fennáll az $a_n > 0$ és az $\sqrt[n]{a_n} < q$ összefüggés, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens. (5 pont)

b) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$

3. Vezessük le két függvény szorzatának deriválási szabályát! (4 pont)

c) $\int \sqrt{1-x^2} dx$

4. A $\cos$ függvény $x_0 = 0$ ponthoz tartozó harmadfokú Taylor-polinomja a maradéktaggal: (3 pont)

7. Egészítsük ki az alábbi állításokat úgy, hogy igazak legyenek. (10 pont)

a) *L'Hospital szabály.* Az egyváltozós valós f és g függvény legyen értelmezve az (a, ∞) intervallumon, és ugyanitt legyen differenciálható is úgy, hogy $x \in (a, \infty)$ esetén ...

Ha $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$, továbbá létezik a...

5. Döntsük el, hogy abszolút vagy feltételesen konvergensek az alábbi sorok! (3+3 pont)

b) Az a pont egy teljes K környezetében értelmezett f függvény folytonos az a pontban, ha...

hogy minden olyan x helyen, ahol $|x - a| < \alpha$, az f értelmezve van és $|f(x) - f(a)| < \beta$.

c) *Változó felső határú integrálra vonatkozó tétel.* Ha az egyváltozós valós f függvény...

az $[a, b]$ intervallumon, akkor az

$$I(x) := \int_{\dots}^{\dots} \dots$$

függvény értelmezve van az $[a, b]$ intervallumon, az (a, b) intervallumon pedig...

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

továbbá igaz a...

összefüggés.

- d) *Határozott integrál definíciója.* Legyen az f az $[a, b]$ intervallumon...

Képezzük az $[a, b]$ egy minden határon túl finomodó $[B_n]$ beosztássorozatát, és ebből az f integrálközelítő összegeinek egy $[I_n]$ sorozatát. Azt mondjuk, hogy az f függvény az $[a, b]$ intervallumon integrálható, ha...

- e) *A differenciálhatóság definíciójának törtmentes alakja:* Azt mondjuk, hogy az f függvény differenciálható az a helyen, ha megadható a -nak egy olyan E teljes környezete, valamint megadható egy olyan...

8. Határozzuk meg az alábbi képlettel megadott $x \mapsto y$ függvény grafikonjának az $x_0 = 1$ abszcisszájú pontjához húzott érintő iránytangensét. (2+3 pont)

a) $\ln \sqrt{e^{1+x^2}}$

b) $(x-1)e^{xy} = 2-y$

9. Állapítsuk meg, hogy az alábbi A és B állítások között milyen logikai kapcsolat van. Írjuk válaszul azt, hogy $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$, $A \Leftrightarrow B$ illetve hogy $A \nRightarrow B$ aszerint, hogy A -ból következik B , B -ből következik A , A és B ekvivalensek illetve A és B egyikéből sem következik a másik. (5 pont)

- a) A : Az f függvény az x_0 pontban folytonos. B : Az f függvény az x_0 pontban differenciálható.
- b) A : $\sum a_n$ sor konvergens. B : $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
- c) Legyen az egyváltozós valós f függvény az x_0 pontban differenciálható. A : $f'(x_0) = 0$. B : f -nek az x_0 pontban szélsőértéke van.
- d) A : Az a_n számsorozat korlátos. B : Az a_n számsorozat bármely zérussorozattal vett szorzata zérussorozat.
- e) Legyen az f függvény folytonos az $[a, b]$ intervallumon. A : f az $[a, b]$ intervallumon invertálható. B : f az $[a, b]$ intervallumon szigorúan monoton.

10. Igazak-e az alábbi állítások? Írjunk I vagy N betűt a négyzetbe, válaszunkat nagyon röviden indokoljuk! Ha a válasz „N”, írjuk le, hogyan lehet kijavítani az állítást! Ha az állítás egy tanult tétellel azonos, akkor elég annyit írni, hogy „TÉTEL”. (10 pont)

- a) Ha az f függvény folytonos az $[a, b]$ intervallumon, akkor korlátos is ott. ☐

- b) Az $\mathbb{R}^k$ metrikus tér bármely sorozatából kiválasztható egy konvergens részsorozat. ☐

- c) Ha egy tetszőleges metrikus tér egy a_n sorozatára igaz az, hogy minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan N küszöbindex, hogy $n, m > N$ esetén $|a_n - a_m| < \varepsilon$, akkor a_n konvergens. ☐

- d) Ha az egyváltozós valós f függvénynek F és G primitív függvényei a $H \subseteq \mathbb{R}$ halmazon, akkor van olyan $c \in \mathbb{R}$ szám, hogy $x \in H$ esetén $F(x) = G(x) + c$. ☐

- e) Ha az egyváltozós valós f függvény kétszer folytonosan differenciálható az x_0 egy teljes környezetében, és $f''(x_0) = 0$, akkor az f függvénynek x_0 -ban inflexiós pontja van. ☐

- f) Ha az egyváltozós valós f függvény 4-szer folytonosan differenciálható az x_0 egy teljes környezetében, $f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = 0$ és $f^{(4)} > 0$, akkor f -nek az x_0 -ban minimuma van. ☐

11. Rajzoljunk nyilakat az alábbi 4 grafikon közé úgy, hogy a nyíl arról a grafikonról induljon, amelyiken ábrázolt függvény differenciálható, és oda mutasson, amelyiken a deriváltja látható. (3 pont)

