

1. Bizonyítsuk be, hogy ha az egyváltozós valós f függvény az a pontban differenciálható, és a egy K környezetének minden x pontjára $f(x) \geq f(a)$, akkor $f'(a) = 0$. (4 pont)
- e) Az $[a, b]$ intervallumon értelmezett folytonos $x \mapsto f(x)$ függvény összes primitív függvénye felírható $x \mapsto \int_a^x f(t) dt + C$, $(x \in [a, b])$ alakban, ahol C egy tetszőleges konstans. ☐

2. Bizonyítsuk be, hogy ha az egyváltozós valós f függvény az $[a, b]$ intervallumon folytonos, akkor van olyan $c \in [a, b]$, hogy (4 pont)

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c).$$

3. Igazak-e az alábbi állítások? Írjunk I vagy N betűt a négyzetbe, válaszunkat nagyon röviden indokoljuk! Ha a válasz „N”, írjuk le, hogyan lehet kijavítani az állítást! Ha az állítás egy tanult tétellel azonos, akkor elég annyit írni, hogy „TÉTEL”. (12 pont)

- a) Ha az f függvény integrálható az $[a, b]$ intervallumon, akkor van olyan F függvény, hogy $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$. ☐

- b) Egy konvergens számsorozat minden részsorozata korlátos. ☐

- c) Ha az egyváltozós valós f függvénynek F és G primitív függvényei a $H \subseteq \mathbb{R}$ halmazon, akkor van olyan $c \in \mathbb{R}$ szám, hogy $x \in H$ esetén $F(x) = G(x) + c$. ☐

- d) Ha az egyváltozós valós f függvény 5-ször folytonosan differenciálható az x_0 egy teljes környezetében, $f''(x_0) = f'''(x_0) = f^{(4)}(x_0) = 0$ és $f^{(5)}(x_0) > 0$, akkor f az x_0 -ban konvex. ☐

- f) A korlátos zárt $[a, b]$ intervallumon értelmezett folytonos valós f függvény értékkészlete egy korlátos zárt intervallum. ☐

4. Egészítsük ki az alábbi állításokat úgy, hogy igazak legyenek. (10 pont)

- a) Ha az egyváltozós valós f függvény 4-szer folytonosan differenciálható az x_0 egy teljes környezetében, $f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = 0$ és $f^{(4)}(x_0) < 0$, akkor f -nek az x_0 -ban ...

- b) *L'Hospital szabály*. Legyen értelmezve az egyváltozós valós f és g függvény az a pont egy jobboldali K környezetében, és ugyanitt legyen differenciálható is úgy, hogy $x \in K$ esetén ...

Ha $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = 0$, továbbá létezik a...

- c) Legyenek f és g egyváltozós valós függvények. Ha g differenciálható az ... pontban és f a ... pontban, akkor $f \circ g$ is differenciálható az x_0 pontban és ...

- d) Az a pont egy teljes K környezetében értelmezett f függvény *folytonos* az a pontban, ha bármely $[x_n]_{n=1}^\infty$ sorozat esetén, melyre ...

igaz, hogy ...

- e) *A differenciálhatóság definíciójának törtmentes alakja*: Azt mondjuk, hogy a g függvény differenciálható az a helyen, ha megadható a -nak egy olyan E teljes környezete, valamint megadható egy olyan ...

5. Döntsük el, hogy abszolút vagy feltételesen konvergensek az alábbi sorok! (3+3 pont)

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2^n}$

6. Határozzuk meg az alábbi kifejezések értékét! (2+3+2+4 pont)

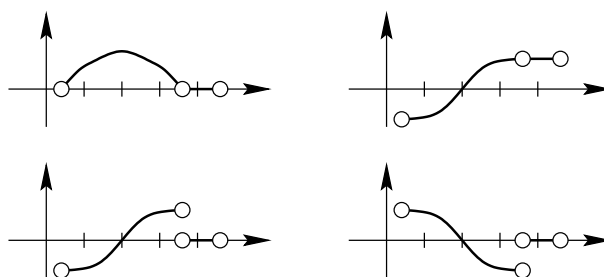
a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3^n}$

b) $\int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx$

c) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx$

d) $\int \sqrt{-2x - x^2} \, dx$

7. Rajzoljunk nyilakat az alábbi 4 grafikon közé úgy, hogy a nyíl minden függvényről a deriváltja felé mutasson. (3 pont)



8. Fejezzük be az alábbi rövid állításokat: (1+2+1+1+2 pont)

- a) Az xy -síkkal párhuzamos sík egyenletének általános alakja:
- b) Az xy -síkkal párhuzamos egyenes egyenletrendszerének általános alakja:
- c) Egy metrikus tér egy H halmazának a P pont határpontja, ha P bármely ...
- d) A binomiális együtthatók additív tulajdonsága szerint:
- e) A harmadik egységgyökök:

9. Határozzuk meg az

$$x = 4t - 1, \quad y = 4, \quad z = 6 - t$$

valamint az

$$\frac{x+1}{2} = \frac{8-y}{2} = 2(z-4)$$

egyenesek irányvektorát és metszéspontjuk koordinátáit! (3 pont)