

1. Tegyük fel, hogy az  $f$  függvény értelmezve van az  $a$  pont egy teljes  $K$  környezetében. Az alábbi mondatok kiegészítésével adjunk meghatározásokat arra, hogy az „ $f$  függvény folytonos az  $a$  pontban”.

(4 pont)

a) Minden  $\varepsilon > 0$  valóshoz van olyan  $\delta > 0$  valós, hogy ha  $x \in K$ , és  $|x - a| < \dots$  akkor ...

b) Létezik az  $f$  bal és jobb oldali határértéke is az  $a$ -ban és a két határérték ...

c) Bármely  $K$ -beli,  $a$ -hoz tartó  $[x_n]$  sorozatra igaz, hogy ...

2. Igazak-e az alábbi állítások? Írjunk I vagy N betűt a négyzetbe, és igazolásképpen I válasz esetén adjunk egy nagyon rövid indoklást, ha az állítás egy tanult tétellel azonos, akkor elég annyit írni, hogy „TÉTEL”, N válasz esetén adjunk egy példát.

(12 pont)

a) Minden  $[0, 1]$ -n értelmezett valós függvény korlátos. ☐

b) Minden  $[0, 1]$ -n értelmezett folytonos valós függvény korlátos. ☐

c) Minden  $[0, 1]$ -n értelmezett differenciálható valós függvény korlátos. ☐

d) Minden  $[0, 1]$ -n értelmezett integrálható valós függvény folytonos. ☐

e) Minden  $[0, 1]$ -n értelmezett folytonos valós függvény integrálható. ☐

f) Minden  $[0, 1]$ -n értelmezett, legfeljebb véges sok pontot kivéve folytonos és korlátos valós függvény integrálható. ☐

3. Mit mondhatunk a  $f$  függvényről az  $x_0$  pontban (növekvő, konvex, maximum, ...), ha azt tudjuk, hogy

(5 pont)

a)  $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0$ :

b)  $f''(x_0) < 0$ :

c)  $f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = 0, f^{(4)}(x_0) < 0$ :

d)  $f''(x_0) = f'''(x_0) = f^{(4)}(x_0) = 0, f^{(5)}(x_0) < 0$ :

4. Állapítsuk meg, hogy az alábbi  $A$  és  $B$  állítások között milyen logikai kapcsolat van. Írjuk válaszul azt, hogy  $A \Rightarrow B$ ,  $B \Rightarrow A$ ,  $A \Leftrightarrow B$  illetve hogy  $A \not\Rightarrow B$  aszerint, hogy  $A$ -ból következik  $B$ ,  $B$ -ből következik  $A$ ,  $A$  és  $B$  ekvivalensek illetve  $A$  és  $B$  egyikéből sem következik a másik.

(5 pont)

a)  $A$ : Az  $a_n$  számsorozat korlátos.  $B$ : Az  $a_n$  számsorozat bármely zérussorozattal vett szorzata zérussorozat.

b)  $A$ :  $\sum a_n$  sor konvergens.  $B$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

c)  $A$ :  $\sum a_n$  sor abszolút konvergens.  $B$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 0$ .

d) Legyen az egyváltozós valós  $f$  függvény az  $x_0$  pontban differenciálható.  $A$ :  $f'(x_0) = 0$ .  $B$ :  $f$ -nek az  $x_0$  pontban szélsőértéke van.

e) Legyen  $f$  folytonos az  $[a, b]$ -n, és differenciálható az  $(a, b)$ -n.  $A$ :  $f(a) = f(b)$   $B$ :  $\exists \xi \in (a, b)$ , hogy  $f'(\xi) = 0$ .

5. Határozzuk meg az alábbi kifejezések értékét! (2+3+3+3+3 pont)

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^{n+1}}$

b)  $\int_0^{\pi} x \sin 2x \, dx$

c)  $\int x e^{x^2} \, dx$

d)  $(x^x + 2^x)'$

e)  $\frac{d}{dx} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & x & 1 \\ 3 & 1 & x \end{vmatrix}$

6. A következő kérdésekben az  $f$  és  $g$  függvények tetszőleges, az egész számegegyenesen differenciálható függvények,  $a, b, c$  tetszőleges valós számok. Melyek igazak (I), melyek hamisak (H) az alábbi összefüggések közül? (5 pont)

a)  $(f(x)g(x))' = f'(x)g'(x)$  ☐

b)  $\int f(x)g(x) dx = \int f(x) dx \int g(x) dx$  ☐

c)  $\int cf(x) dx = c \int f(x) dx$  ☐

d)  $\int xf(x) dx = x \int f(x) dx$  ☐

e)  $\int_a^b f(x) dx - \int_c^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$  ☐

7. Vezessük le az arcsin függvény deriváltjára vonatkozó képletet! (3 pont)

8. A  $\cos$  függvény  $x_0 = 0$  ponthoz tartozó negyedfokú Taylor-polinomja a maradéktaggal: (3 pont)

9. Írjuk le a binomiális tételt, és segítségével számítsuk ki a  $(2+i)^5$  értékét! (4 pont)

10. Mutassuk meg, hogy ha egy korlátos zárt  $H$  halmazon értelmezett  $f$  függvényhez található olyan  $[x_n] \subset H$  sorozat, melyre  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$ , akkor  $f$  nem lehet  $H$  minden pontjában folytonos. (5 pont)