

1. Adjuk meg az A együtthatómátrixú homogén lineáris egyenletrendszer megoldásait egy független vektorhalmaz lineáris kombinációiként.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \\ -1 & 7 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

2. Legyen $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, és $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Számítsuk ki az AC , $AB + C$, $B - 2A^T$, BA , $BA - C$ és $C^T + C$ kifejezések közül azokat, amelyek értelmezve vannak!

3. Mit kapunk eredményül, ha egy mátrixot megszorozunk jobbról egy csupa egyes számból álló oszlopvektorral, illetve balról egy csupa egyes számból álló sorvektorral?
4. a) Keressünk olyan 3×3 -as A mátrixot, amellyel az $X \mapsto AX$ leképezés minden 3×4 -es X mátrixra megcseréli az X első két sorát!
b) Keressünk olyan 4×4 -es B mátrixot, amellyel az $X \mapsto XB$ leképezés minden 3×4 -es X mátrix harmadik oszlopához hozzáadja az első oszlop kétszeresét.
c) Milyen (nem feltétlenül elemi) sor-, illetve oszlopműveletet jelent az alábbi mátrixokkal való bal-, illetve jobbszorítás:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Szimultán egyenletrendszerként oldjuk meg az alábbi mátrixegyenletet!

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

6. Számítsuk ki az $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix inverzét az $AX = I$ szimultán egyenletrendszer megoldásával, és ennek felhasználásával is oldjuk meg az 5. feladatot!

7. Legyen $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ és $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$. Határozzuk meg A inverzét, és oldjuk meg az $AX = BB^T$ egyenletet.

8. Legyen $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1+i & i \\ i & i \end{bmatrix}$.

Számítsuk ki az A^{10} , B^{10} , C^n , D^2 és D^{-1} mátrixhatványokat!

9. Határozzuk meg a következő mátrixok rangját.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

10. Bizonyítsuk be, hogy AB rangja nem nagyobb, mint A rangja!

Megoldások:

$$1. \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5}s - t \\ -\frac{2}{5}s - t \\ s \\ t \end{bmatrix} = \frac{1}{5}s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ahol a két vektor nyilván független, mert nem skalárszorosa egymásnak, és $\frac{1}{5}s$ és t tetszőleges valós értéket felvehet.

2. Az AC és $BA - C$ kifejezések nincsenek értelmezve, a többi értékei:

$$AB + C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B - 2A^T = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 0 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 5 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \quad C^T + C = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}.$$

3. Az első esetben a mátrix oszlopainak mint vektoroknak az összegét, a második esetben pedig a mátrix sorainak az összegét.

$$4. A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$C \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \\ \mathbf{s}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_3 \\ \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \end{bmatrix}, \quad D \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \\ \mathbf{s}_3 \\ \mathbf{s}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \\ \mathbf{s}_3 - \mathbf{s}_2 \\ \mathbf{s}_4 \end{bmatrix}, \quad E \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \\ \mathbf{s}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 \\ 2\mathbf{s}_2 + 2\mathbf{s}_3 \\ \mathbf{s}_3 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{o}_1 \quad \mathbf{o}_2 \quad \mathbf{o}_3]C = [\mathbf{o}_2 \quad \mathbf{o}_3 \quad \mathbf{o}_1], \quad [\mathbf{o}_1 \quad \mathbf{o}_2 \quad \mathbf{o}_3 \quad \mathbf{o}_4]D = [\mathbf{o}_1 \quad \mathbf{o}_2 - \mathbf{o}_3 \quad \mathbf{o}_3 \quad \mathbf{o}_4]$$

$$[\mathbf{o}_1 \quad \mathbf{o}_2 \quad \mathbf{o}_3]E = [\mathbf{o}_1 \quad 2\mathbf{o}_2 \quad 2\mathbf{o}_2 + \mathbf{o}_3]$$

(A mátrixokkal való bal-, illetve jobbszorzás hatása leolvasható abból, hogy az eredeti mátrixot milyen sor-, illetve oszlopműveletekkel kaphatjuk meg az egységmátrixból, ugyanis amikor az egységmátrixot szorozzuk be vele, akkor sajátmaga lesz a szorzat.)

$$5. X = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & -2 \\ -1 & -7 \end{bmatrix}.$$

$$6. A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \text{ és ebből } X = A^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & -2 \\ -1 & -7 \end{bmatrix}.$$

7. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -28 \\ -2 & 2 & 11 \\ -6 & 2 & 27 \end{bmatrix}.$

8. $A^{10} = A$, mert $A^3 = I$; B^{10} a nulla mátrix (már B^3 is az); $C^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; végül $D^2 = \begin{bmatrix} -1+2i & -2+i \\ -2+i & -2 \end{bmatrix}$ és $D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1-i \end{bmatrix}.$

9. A rangok: 1, 2, 3 és 3.

10. Legyen C olyan (invertálható) mátrix, amellyel való balszorzás az A -t lépcsős alakra hozza (a lépcsős alakra hozáshoz szükséges elemi mátrixok szorzata). Ha A -nak n sora van, és CA -ban k nulla sor van, akkor A rangja $n - k$. A $C(AB) = (CA)B$ mátrixnak is nulla az alsó k sora, és AB -ből elemi sorműveletekkel kapható, tehát további sorműveletekkel úgy lehet lépcsős alakra hozni AB -t, hogy az alsó k sor továbbra is nulla marad. Így AB rangja legfeljebb $n - k$.