MAT A2 – 1. ZH. – 2009. március 25. Név: ______________________ Gyakvez.: ______

1. Végezzük el az alábbi számításokat! *(14 pont)*

a) Tegyük fel, hogy a 4×4-es $\mathbf{A}$ mátrixra $\det(\mathbf{A}) = 3$. Ekkor $\det(\mathbf{A}^{-1}) = \ldots$ $\det(2\mathbf{A}) = \ldots$

b) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \ldots$

c) Ha az $\mathbf{A}$ egy $k \times m$-es mátrix, és sorterének dimenziója r, akkor az $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ egyenletrendszerben a szabad változók száma =

d) Az $x - y + 2z = 0$ síkra való merőleges vetítés sajátaltereit a következő vektorok feszítik ki:

e) A sík origó körüli $-\pi/3$ radiánnal való elforgatásának mátrixa =

f) Egy $\mathbf{A}$ mátrix karakterisztikus polinomja $(2-\lambda)^2(3-\lambda)(-1-\lambda)$. Ekkor $\det(\mathbf{A}) = \ldots$

g) Írjuk fel az $\mathbf{A}$ mátrix előjeles A_{23} aldeterminánsát (kiszámítani nem kell, csak felírni):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ d & a & b & c \end{bmatrix}, \quad A_{23} =$$

h) Írjuk fel a Jacobi-iterációban alkalmazandó képleteket, és számítsuk ki az iteráció első lépését a következő egyenletrendszer esetén, ahol az induló érték legyen $(x_0, y_0) = (1, 1)$:

$$4x + 2y = 8$$
$$2x + 3y = 8$$

2. Legyen $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ két $n \times n$-es mátrix. Melyik igaz és melyik hamis a következő állítások közül (I vagy H)? *(4 pont)*

a) Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ egyenletrendszernek pontosan akkor van nemtriviális megoldása, ha $\det(\mathbf{A}) \neq 0$. ☐

b) Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer megoldásainak halmaza altér $\mathbf{R}^n$-ben. ☐

c) $\det \mathbf{A} = 0$ pontosan akkor igaz, ha $\operatorname{rang} \mathbf{A} < n$. ☐

d) Ha $\det \mathbf{A} = 0$, akkor 0 nem lehet az $\mathbf{A}$ sajátértéke. ☐

e) Ha $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$, akkor $\mathbf{A} = \mathbf{O}$ vagy $\mathbf{B} = \mathbf{O}$. ☐

3. Oldjuk meg a $\left[\begin{smallmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right]\mathbf{X} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right]$ mátrixegyenletet! *(4 pont)*

4. Írjuk fel az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix LU-felbontását! *(4 pont)*

5. Válasszunk ki az $\mathbf{v}_1 = (1,2,1,3)$, $\mathbf{v}_2 = (2,4,2,6)$, $\mathbf{v}_3 = (0,2,3,1)$, $\mathbf{v}_4 = (1,4,4,4)$ és $\mathbf{v}_5 = (2,6,5,7)$ vektorok közül maximális számú lineárisan függetlent és és állítsuk elő a többit ezek lineáris kombinációjaként. *(4 pont)*

6. Milyen a és b értékekre lesz 0, 1 vagy végtelen sok megoldása az alábbi kibővített mátrixú egyenletrendszernek? Adjuk is meg a megoldást abban az esetben, ha végtelen sok megoldás van!

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & b & -1 & 2 \\ 0 & 0 & a+2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b+1 \end{array}\right]$$

(5 pont)

7. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Adjuk meg a sajátértékeit és sajátvektorait. Számítsuk az $\mathbf{A}^{10}$ mátrixot (ehhez használjuk $\mathbf{A}$ diagonalizációját)! *(5 pont)*