Matematika A3 (közlekedésmérnököknek), 2016 ősz
1. zh.

A rendelkezére álló idő 90 perc, indoklás nélküli eredményközlés nem fogadható el.

1. Határozza meg a $\sum_{n=0}^{\infty}\left((-3)^n \cdot \frac{n^2+1}{2n^2+3}\right)^n \cdot (z+2i)^n$ sor konvergenciakörének középpontját és sugarát! (4+2 pont)

2. Oldja meg a komplex számok halmazán a $\operatorname{sh}(i\pi z)+i=0$ egyenletet! (10 pont)

3. Tekintsük a $\mathbb{C}$-n értelmezett $f(z)=(z+\overline{z})\cdot \operatorname{Im}(z)+(z-\overline{z})\cdot \operatorname{Re}(z)$ komplex függvényt! Adja meg, hogy f a $\mathbb{C}$ mely pontjaiban a) differenciálható, b) reguláris? (8+2 pont)

4. Ha van, adja meg az $u(x,y)=e^{-x}\cos y+x^2-y^2$ függvény azon $v(x,y)$ harmonikus társát, mellyel az $f=u+iv$ függvény reguláris lesz és melyre $f(\frac{\pi i}{2})=-\frac{\pi^2}{4}+2i$ teljesül! Adja meg az így nyert v-vel és az u-val megadott $f=u+iv$ komplex függvény deriváltfüggvényét! (8+2 pont)

5. Számítsa ki az alábbi integrálokat és a végeredményt adja meg algebrai alakban,

$$\text{a)}\quad \int_G \operatorname{Re}(3z^2)\,\mathrm{d}z, \qquad\qquad \text{b)}\quad \int_H e^{-iz}\,\mathrm{d}z$$

ahol G az 1 kezdőpontú, $1+2i$ végpontú egyenes szakasz és H a 0 kezdőpontú és $i+\pi$ végpontú egyenes szakasz. (6+4 pont)

6. Számítsa ki az alábbi integrálokat! A görbék, melyeken integrálni kell, pozitívan vannak irányítva. (7+7 pont)

$$\text{a)}\quad \int_{|z-1|=5} \frac{z+1}{(z-i)(z+2)}\,\mathrm{d}z, \qquad\qquad \text{b)}\quad \int_{|z|=6} \frac{\sin z}{(z-\pi)^3}\,\mathrm{d}z$$

MO.

1. Az $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ alakkal összevetve: $z_0 = -2i$ és a Cauchy–Hadamard-tétel alapján:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} 3 \cdot \dfrac{n^2+1}{2n^2+3}} = \frac{2}{3}$$

2.

$$\frac{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}{2} + i = 0$$
$$e^{i\pi z} - e^{-i\pi z} + 2i = 0$$

Legyen $w = e^{i\pi z}$:

$$\begin{aligned} w^2 + 2iw - 1 &= 0 \\ (w+i)^2 &= 0 \\ w = e^{i\pi z} &= -i \\ e^{i\pi z} &= e^{-i\frac{\pi}{2}} \\ i\pi z &= -i\frac{\pi}{2} + 2\pi i k \\ z &= -\frac{1}{2} + 2k \end{aligned}$$

ahol $k \in \mathbb{Z}$.

3. $f(x+iy) = (x+iy+x-iy)y + (x+iy-x+iy)x = 2xy + 2xyi$. A Cauchy–Riemann-egyenletrendszer:

$$2y = 2x$$

$$2y = -2x$$

Ami $z \neq 0$-ra nem teljesül. De 0-ban igen, és mert $(2xy, 2xy)$ totálisan differenciálható ezért ott f komplex módon is differenciálható, vagy

$$\begin{aligned} \lim_{x+iy\to 0} \frac{2xy+2xyi}{x+iy} &= \lim_{x+iy\to 0} \frac{(2xy+2xyi)(x-iy)}{x^2+y^2} \\ &= \lim_{x+iy\to 0} \frac{2x^2y + 2x^2yi - 2xy^2i + 2xy^2}{x^2+y^2} \\ &= \lim_{x+iy\to 0} \frac{2xy(x+y) + 2xyi(x-y)}{x^2+y^2} \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{2r^2\cos\varphi\sin\varphi(r\cos\varphi + r\sin\varphi) + 2r^2\cos\varphi\sin\varphi i(r\cos\varphi - r\sin\varphi)}{r^2} \\ &= \lim_{r\to 0} 2\cos\varphi\sin\varphi(r\cos\varphi + r\sin\varphi) + 2\cos\varphi\sin\varphi(r\cos\varphi - r\sin\varphi)i = 0 \end{aligned}$$

mert korlátos szor nullhoz tartó alakú, vagy

$$\lim_{z\to 0} \frac{(z+\overline{z})\cdot \mathrm{Im}(z) + (z-\overline{z})\cdot \mathrm{Re}(z)}{z} = \lim_{z\to 0} (z+\overline{z}) \cdot \frac{\mathrm{Im}(z)}{z} + (z-\overline{z}) \cdot \frac{\mathrm{Re}(z)}{z} = 0$$

mert korlátos szor nullához tartó alakúak. Tehát $z=0$-ban $\mathbb{C}$-differenciálható és sehol sem reguláris.

4. Világos, hogy $u(x,y) = \mathrm{Re}(e^{-x-iy} + (x+iy)^2)$, ezért

$$v(x,y) = -e^{-x}\sin y + 2xy + c$$

De a feltétel szerint $f(0+\frac{\pi i}{2}) = -\frac{\pi^2}{4} + i(-1+c) = -\frac{\pi^2}{4} + 2i$. Tehát $c = 3$.

$$f'(x+iy) = -e^{-x}\cos y + 2x + i(e^{-x}\sin y + 2y)$$

5. G az 1 kezdőpontú, $1+2i$ végpontú egyenes szakasz: $z(t) = 1+2it$, $0 \le t \le 1$, $\dot{z}(t) = 2i$

$$\int_G \mathrm{Re}(3z^2)\,\mathrm{d}z = \int_G 3x^2 - 3y^2\,\mathrm{d}(x+iy) = \int_{t=0}^{1} (3-12t^2)2i\,\mathrm{d}t = 2i\left[3t - 4t^3\right]_0^1 = -2i$$

Mivel

$$\left(\frac{1}{-i}e^{-iz}\right)' = e^{-iz}$$

ezért $F(z) = \frac{1}{-i}e^{-iz}$ primitív függvénye $f(z) = e^{-iz}$-nek, ezért alkalmazhatjuk a komplex Newton–Leibniz-tételt:

$$\int_{H,0}^{i+\pi} e^{-iz}\,\mathrm{d}z = \left[\frac{1}{-i}e^{-iz}\right]_0^{i+\pi} = ie^{-i(i+\pi)} - ie^0 = ie^{1-i\pi} - i = -ie - i = i(-e-1)$$

6.

$$\int_{|z-1|=5} \frac{z+1}{(z-i)(z+2)}\,\mathrm{d}z = \int_{|z-i|=1} \frac{\frac{z+1}{z+2}}{z-i}\,\mathrm{d}z + \int_{|z+2|=1} \frac{\frac{z+1}{z-i}}{z+2}\,\mathrm{d}z = *$$

ahol a számlálókban a törtek a körlapokon már regulárisak

$$* = 2\pi i\left.\frac{z+1}{z+2}\right|_{z=i} + 2\pi i\left.\frac{z+1}{z-i}\right|_{z=-2}\mathrm{d}z = 2\pi i\frac{i+1}{i+2} + 2\pi i\frac{1}{2+i} = 4\pi i$$

$$\int_{|z|=6} \frac{\sin z}{(z-\pi)^3}\,\mathrm{d}z = \pi i(-\sin z)|_{z=\pi} = 0$$

ahol a 2. deriváltra vonatkozó Cauchy-formulát használtuk.