

1. Tekintsük az origó körüli egységkör x tengely fölötti félkörívének következő paraméterezéseit.

I. $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq \pi$;

II. $\mathbf{r}(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$, $-1 \leq t \leq 1$;

III. $\mathbf{r}(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$;

IV. $\mathbf{r}(t) = (\cos t, |\sin t|)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Melyik paraméterezések írják le egyenletes (pályamenti) sebességű mozgást? Az egyenletek közül melyik mozog lassabban, illetve gyorsabban? A nem egyenletesek hol mozognak lassabban, illetve gyorsabban?

2. Milyen görbét írják le a következő függvények?

a) $\mathbf{r}(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, t)$;

b) $\mathbf{r}(t) = (t^2, 2 + t^2, 1 - 4t^2)$.

3. Paraméterezzük az $x^2 + y^2 = z^2$ és az $x + y + z = 1$ felületek metszetgörbét!

4. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{r} = (3 - t, t^2 - 4, 2t - 2)$ görbe síkgörbe, és adjuk meg a görbét tartalmazó sík egyenletét. (Útmutatás: keressük meg azokat az A, B, C, D paramétereket, amelyekre a görbe pontjai kielégítik az $Ax + By + Cz = D$ egyenletet.)

5. Számítsuk ki a következő határértékeket!

a) Mi a $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, \frac{1}{(t-1)^2})$ limesze, ha a t paraméter 1-hez, ∞ -hez vagy $-\infty$ -hez tart?

Mit állapíthatunk meg ennek alapján a görbe menetéről?

b) $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin t}{t} \mathbf{i} + \frac{t^2 + t}{t} \mathbf{j} + \frac{\cos t - 1}{t^2} \mathbf{k} \right) = ?$

c) $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t^2}{e^t}, \frac{2t^2 + 2t + 3}{3t^2 - 2}, \sqrt{t+1} - \sqrt{t} \right) = ?$

6. Számítsuk ki az 1. és 2. feladat paraméterezett görbéire a sebességvektorokat és a görbementi sebességet!

7. Határozzuk meg a megadott görbék érintőjének egyenletrendszerét a t_0 paraméterű pontban!

a) $\mathbf{r}(t) = (t^2, \frac{t+1}{t}, \frac{t}{t+1})$, $t_0 = 1$

b) $\mathbf{r} = \left(\frac{1}{1-t}, \ln(1+t^2), e^{-t} \right)$, $t_0 = 0$.

8. Milyen görbét ír le az $\mathbf{r}(t) = (t^3, \sqrt{t^6})$ paraméterezés? Differenciálható-e az $\mathbf{r}(t)$ függvény a $t = 0$ pontban? Van-e ott a görbének érintője?

9. Számítsuk ki a megadott görbedarabok ívhosszát!

a) $\mathbf{r}(t) = (t, 2\sqrt{t^3}, t\sqrt{8})$, $0 \leq t \leq 3$

b) $\mathbf{r}(t) = (\cos t + t \sin t, \sin t - t \cos t, t)$, $0 \leq t \leq 1$.

10. Térjünk át ívhosszparaméterre a következő görbékénél!

a) $\mathbf{r}(t) = (t, 2\sqrt{t^3}, t\sqrt{8})$, $0 \leq t \leq 3$

b) $\mathbf{r}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t)$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$