1. *Kétváltozós függvényekre való visszavezetéssel bizonyítsuk be, hogy az $f(z) = |z|$ és $g(z) = az + b$ $(a, b \in \mathbb{C})$ függvények mindenütt folytonosak!*

Megoldás: $f(x + yi) = \sqrt{x^2 + y^2}$ folytonos mint kétváltozós függvény.
$g(x + yi) = (a_1 + a_2i)(x + yi) + (b_1 + b_2i) = (a_1x - a_2y + b_1) + (a_2x + a_1y + b_2)i$, és az $u(x, y) = a_1x - a_2y + b_1$ és $v(x, y) = a_2x + a_1y + b_2$ kétváltozós függvények folytonosak.

2. *Határozzuk meg a következő komplex függvények határértékét z_0-ban, ha létezik! Lehet-e egy függvényérték megváltoztatásával mindenütt folytonossá tenni a függvényt?*

a) $\dfrac{\overline{z}}{z}$, $z_0 = 0$ *b)* $\dfrac{z \operatorname{Re} z}{|z|}$, $z_0 = 0$ *c)* $\dfrac{z^4 + 3z^2 + 2}{z - i}$, $z_0 = i$

Megoldás: a) Nincs határértéke, mert különböző görbéken tartva a 0-hoz más-más határértéket kaphatunk. Pl. a $z(t) = t$ $(t \in \mathbb{R})$ görbén $\lim\limits_{t\to 0} \frac{t}{t} = 1$, míg a $z(t) = ti$ $(t \in \mathbb{R})$ görbén $\lim\limits_{t\to 0} \frac{-ti}{ti} = -1$. Így folytonossá sem tehető.

b) Legyen $f(z) = \frac{z \operatorname{Re} z}{|z|}$. Mivel $0 \le |f(z)| = |Rez| \le |z| \to 0$, ha $z \to 0$, a rendőrelv miatt $\lim\limits_{z\to 0} |f(z)| = 0$, és így $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = 0$. $z = x + yi \neq 0$-ra $f(z) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i\dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ valós és képzetes része is folytonos, kétváltozós függvény, tehát f(z) mindenütt folytonos lesz, ha a 0-ban 0-nak definiáljuk.

c) A $z_0 = i$-ben a nevező és a számláló is 0-hoz tart, mert folytonosak és i-ben 0 az értékük. A polinom gyökhelyéhez tartozó gyöktényezőt ki lehet emelni: $z^4 + 3z^2 + 2 = (z - i)(z^3 + iz^2 + 2z + 2i)$, tehát $\lim\limits_{z\to i} \dfrac{z^4 + 3z^2 + 2}{z - i} = \lim\limits_{z\to i} z^3 + iz^2 + 2z + 2i = 2i$. Minenhol máshol folytonos a függvény, mert két folytonos függvény hányadosa, nem nulla nevezővel, így ha a függvényt i-ben $2i$-nek definiáljuk, akkor mindenhol folytonos lesz.

3. *Differenciálhatók-e valahol az alábbi komplex függvények? Ahol differenciálható, ott adjuk is meg a deriváltat!*

a) $|z|^2$ *b)* $\cos \bar{z}$

Megoldás: a) $u(x, y) = x^2 + y^2$, $v(x, y) = 0$, mindkettő differenciálható kétváltozós függvény. Ezekre $u_x = 2x$, $v_y = 0$, $u_y = 2y$ és $v_x = 0$. Tehát $u_x = v_y$ és $u_y = -v_x$ csak akkor teljesül, ha $z = x + yi = 0$. Tehát egyedül 0-ban differenciálható a $|z|^2$ függvény, és ott a deriváltja $u_x + iv_x = 0$.

b) $\cos(\overline{x + yi}) = \cos(x - yi) = \cos x \cos(yi) + \sin x \sin(yi) = \cos x \operatorname{ch} y + i \sin x \operatorname{sh} y = u(x, y) + iv(x, y)$. A kapott $u(x, y) = \cos x \operatorname{ch} y$ és $v(x, y) = \sin x \operatorname{sh} y$ kétváltozós függvények mindegyike differenciálható. A Cauchy–Riemann-differenciálegyenletek szerint az f függvény differenciálhatóságához az kell még, hogy $u_x = v_y$ és $u_y = -v_x$ legyen. $u_x = -\sin x \operatorname{ch} y$, $v_y = \sin x \operatorname{ch} y$, $u_y = \cos x \operatorname{sh} y$, és $v_x = \cos x \operatorname{sh} y$, tehát a két egyenlet csak akkor teljesülhet egyszerre, ha $\sin x \operatorname{ch} y = \cos x \operatorname{sh} y = 0$. De $\operatorname{ch} y \ge 1$ minden y-ra, tehát $\sin x = 0$, azaz $x = k\pi$ valamely $k \in \mathbb{Z}$-re, és a második egyenletből $\operatorname{sh} y = 0$, ezért $y = 0$. Így a függvény a $z = k\pi$ helyeken differenciálható, és itt a deriváltja $u_x + iv_x = 0$.

4. *Határozzuk meg azt a reguláris $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ függvényt, amelyre*

a) $u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(\pi) = \frac{1}{\pi}$; *b)* $v(x, y) = 2y(x + 1)$, $f(i) = 2i - 1$.

Megoldás: a) $u_x = \dfrac{1\cdot(x^2+y^2) - x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = v_y$, és $u_y = \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = -v_x$. A másodikból $v = \dfrac{-y}{x^2+y^2} + g(y)$ következik (alkalmas, csak y-tól függő $g(y)$ függvénnyel), és akkor $v_y = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + g'(y)$, tehát $u_x = v_y$ miatt $g'(y) = 0$, azaz $g(y) = C$ konstans. Így $v(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2} + C$. A feltétel szerint $u(\pi,0) + iv(\pi,0) = \frac{1}{\pi} + Ci = \frac{1}{\pi}$, tehát $C = 0$, és $f(z) = \dfrac{x}{x^2+y^2} + i\dfrac{-y}{x^2+y^2} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2} = \dfrac{1}{z}$.

b) $u_x = v_y = 2(x+1)$, és $u_y = -v_x = -2y$. Így $u(x,y) = \int 2(x+1)\,dx = (x+1)^2 + g(y)$, amiből $u_y = g'(y) = -2y$, tehát $g(y) = -y^2 + C$, ezért $u(x,y) = (x+1)^2 - y^2 + C$, és $f(x+yi) = (x+1)^2 - y^2 + C + 2y(x+1)i$. Az $f(i) = 2i-1$ feltétel miatt $2i - 1 = 1 - 1 + C + 2i$, tehát $C = -1$, és $f(x+yi) = (x+1)^2 - y^2 + 2y(x+1)i - 1$. (A függvényt kifejezhetjük z-vel is: $f(x) = x^2 - y^2 + 2xyi + 2x + 2yi = z^2 + 2z$.)

5. *Határozzuk meg az alábbi komplex hatványsorok konvergenciatartományának középpontját és sugarát, valamint a c)-beli hatványsor összegfüggvényét!*

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!}{n^n}(z-i)^n$ *c)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{i^n}(z+i)^{n+1}$

Megoldás: a) Gyökkritériummal: $\sqrt[n]{\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n\right|} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n |z| \to e|z| < 1$, ha $|z| < \frac{1}{e}$. A konvergencia-középpont 0, a konvergenciasugár $\frac{1}{e}$.

b) Hányadoskritériummal (a faktoriális miatt):

$$\left|\frac{n!}{(n+1)^{n+1}}(z-i)^{n+1}\right| \Big/ \left|\frac{(n-1)!}{n^n}(z-i)^n\right| = \frac{n}{\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}}|z-i| =$$

$$\frac{n}{(n+1)\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}|z-i| = \frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}|z-i| \to \frac{1}{e}|z-i| < 1,$$ ha $|z-i| < e$. A konvergencia-középpont i, a konvergenciasugár e.

c) Gyökkritériummal: $\sqrt[n]{\dfrac{n}{|i^n|}|z+i|^{n+1}} = \sqrt[n]{n}\cdot|z+i|^{(n+1)/n} \to |z+i| < 1$ esetén abszolút konvergens a sor. A konvergencia-középpont $-i$, a konvergenciasugár 1. Ahol a sor abszolút konvergens:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{i^n}(z+i)^{n+1} = (z+i)^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{i^n}n(z+i)^{n-1} = (z+i)^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{i^n}\left((z+i)^n\right)' =$$

$$(z+i)^2\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-iz+1)^n\right)' = (z+i)^2\left(\frac{1}{1-(-iz+1)}\right)' = (z+i)^2\left(\frac{1}{iz}\right)' = i\frac{(z+i)^2}{z^2}$$

6. *Számítsuk ki az $f(z)$ függvény integrálját a megadott $\mathcal{G}$ görbe mentén:*

a) $f(z) = iz^2 - 2\overline{z}$, $\mathcal{G}:\ |z| = 2$, $\operatorname{Re} z \ge 0$, $\operatorname{Im} z \ge 0$, *a kör negatív irányítása szerint;*

b) $f(z) = \operatorname{Re}(z + z^2)$, $\mathcal{G}$ *a* $y = x^2$ $(0 \le x \le 1)$ *egyenletű parabola a komplex síkon, és az irány az x növekedésének iránya;*

c) $f(z) = \dfrac{z+2}{z}$, $\mathcal{G}$ *a* $|z| = 2$, $\operatorname{Im} z \le 0$ *körív, pozitív forgásiránnyal;*

d) $f(z) = 3z^2 + 2z$, $\mathcal{G}$ *az* $1-i$, $2-i$, $2+i$ *pontokat összekötő törtvonal.*

Megoldás: a) Az első síknegyedbeli negyedkör paraméterezése negatív irányban $z(t) = 2e^{it}$, ahol t $\frac{\pi}{2}$-től 0-ig megy. $f(z(t)) = i4e^{2it} - 4e^{-it}$, $z'(t) = 2ie^{it}$,

$f(z(t))z'(t) = -8e^{3it} - 8i$, tehát $\int_{\mathcal{G}} f(z)\,dz = \int_{\pi/2}^{0} -8e^{3it} - 8i\,dt = \left[-\frac{8}{3i}e^{3it} - 8it\right]_{\pi/2}^{0} = \frac{8}{3}i - \frac{8}{3}ie^{3\pi i/2} + 4\pi i = (\frac{8}{3} + 4\pi)i - \frac{8}{3}i(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) = -\frac{8}{3} + (\frac{8}{3} + 4\pi)i$.

b) A görbe paraméterezése $z(t) = t + t^2 i$ $(0 \le t \le 1)$. Ebből $z'(t) = 1 + 2ti$, $f(z(t)) = \operatorname{Re}(t + t^2 i + t^2 - t^4 + 2t^3 i) = \operatorname{Re}\left((t + t^2 - t^4) + i(t^2 + 2t^3)\right) = t + t^2 - t^4$, és $f(z(t))z'(t) = (t + t^2 - t^4) + i(2t^2 + 2t^3 - 2t^5)$. Így $\int_{\mathcal{G}} f(z)\,dz = \int_0^1 t + t^2 - t^4\,dt + i\int 2t^2 + 2t^3 - 2t^5\,dt = \left[\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5\right]_0^1 + i\left[\frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^4 - \frac{1}{3}t^6\right]_0^1 = \frac{19}{30} + \frac{5}{6}i$.

c) $z(t) = 2e^{it}$ $(\pi \le t \le 2\pi)$, $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \frac{2e^{it} + 2}{2e^{it}}(2ie^{it})\,dt = \int_{\pi}^{2\pi} 2ie^{it} + 2i\,dt = \left[2e^{it} + 2it\right]_{\pi}^{2\pi} = 2e^{2\pi i} - 2e^{\pi i} + 2\pi i = 2 - (-2) + 2\pi = 4 + 2\pi i$.

d) $f(z)$-nek van primitív függvénye: $z^3 + z^2$, így $\int_{\mathcal{G}} f(z)\,dz = \left[z^3 + z^2\right]_{1-i}^{2+i} = (2+i)^3 + (2+i)^2 - (1-i)^3 - (1-i)^2 = 7 + 19i$.