**1.** *Tekintsük az origó körüli egységkör $x$ tengely fölötti félkörívének következő paraméterezéseit.*
*I.* $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \le t \le \pi$;
*II.* $\mathbf{r}(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$, $-1 \le t \le 1$;
*III.* $\mathbf{r}(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$;
*IV.* $\mathbf{r}(t) = (\cos t, |\sin t|)$, $0 \le t \le 2\pi$.
*Melyik paraméterezések írnak le egyenletes (pályamenti) sebességű mozgást? Az egyenletesek közül melyik mozog lassabban, illetve gyorsabban? A nem egyenletesek hol mozognak lassabban, illetve gyorsabban?*

*Megoldás:* Az I., III. egyenletes, de III. kétszer olyan gyors. IV. oda-vissza halad a görbén, csak $(0,\pi)$-n és $(\pi, 2\pi)$-n egyenletes, de nem a teljes pályán ($\pi$-ben nem is differenciálható a $\mathbf{r}(t)$ függvény). II. nem egyenletes, az elején és a végén gyorsabb, a közepén lassabb.

**2.** *Milyen görbét írnak le a következő függvények?*
*a)* $\mathbf{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t, t)$;
*b)* $\mathbf{r}(t) = (t^2, 2+t^2, 1-4t^2)$.

*Megoldás:* a) Csavarvonal egy 2 sugarú henger körül.
b) Félegyenes, az $x = u$, $y = 2+u$, $z = 1-4u$ egyenes része, a paraméterezés kétszer járja be a félegyenest.

**3.** *Paraméterezzük az $x^2+y^2 = z^2$ és az $x+y+z = 1$ felületek metszetgörbéjét!*

*Megoldás:* Helyettesítsük be a második egyenletből kifejezett $z = 1-x-y$ ismeretlent az elsőbe: $x^2+y^2 = (1-x-y)^2$. Kiszorzás és átrendezés után azt kapjuk, hogy $2xy-2x-2y+1 = 0$, azaz $y = \dfrac{2x-1}{2x-2}$, és így $z = 1-x-y = 1-x-\dfrac{2x-1}{2x-2} = -x-\dfrac{1}{2x-2}$. Tehát a $t = x$ paramétert választva a görbe az $\mathbf{r}(t) = \left(t\,,\ \dfrac{2t-1}{2t-2}\,,\ -t-\dfrac{1}{2t-2}\right)$ függvénnyel írható le, ahol $t \ne 1$.

**4.** *Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{r} = (3-t, t^2-4, 2t-2)$ görbe síkgörbe, és adjuk meg a görbét tartalmazó sík egyenletét. (Útmutatás: keressük meg azokat az $A, B, C, D$ paramétereket, amelyekre a görbe pontjai kielégítik az $Ax+By+Cz = D$ egyenletet.)*

*Megoldás:* Helyettesítsük be a görbe koordinátáit az ismeretlen együtthatójú $Ax+By+Cz = D$ síkegyenletbe: $A(3-t)+B(t^2-4)+C(2t-2) = D$, azaz $Bt^2+(-A+2C)t+(3A-4B-2C) = D$ kell, hogy teljesüljön minden $t$-re, azaz az egyenlőségjel két oldalán levő polinomok együtthatói megegyeznek: $B = 0$, $-A+2C = 0$, és $3A-4B-2C = D$. Ebből $B = 0$, $A = 2C$, és $D = 4C$. A $C$ ismeretlen értékét tetszőlegesen választhatjuk, pl. $C = 1$-re megkapjuk, hogy a keresett sík egyenlete $2x+z = 4$. (Visszahelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy ez tartalmazza a megadott görbét).

**5.** *Számítsuk ki a következő határértékeket!*
*a)* *Mi a* $\mathbf{r}(t) = \left(t\,,\ t^2\,,\ \dfrac{1}{(t-1)^2}\right)$ *limesze, ha a $t$ paraméter 1-hez, $\infty$-hez vagy $-\infty$-hez tart? Mit állapíthatunk meg ennek alapján a görbe menetéről?*
*b)* $\displaystyle\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\,\mathbf{i}+\frac{t^2+t}{t}\,\mathbf{j}+\frac{\cos t-1}{t^2}\,\mathbf{k}\right) = ?$
*c)* $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t^2}{e^t}\,,\ \frac{2t^2+2t+3}{3t^2-2}\,,\ \sqrt{t+1}-\sqrt{t}\right) = ?$

*Megoldás:* a) 1-ben $(1,1,+\infty)$-hez tart, azaz a görbe két ága is (1-hez egyik vagy másik oldalról tartva) az $x = 1$, $y = 1$ egyenletrendszerű egyeneshez közelít, miközben $z$-vel tartunk a végtelenbe. $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\mathbf{r}(t) = (\infty,\infty,0)$ és $\displaystyle\lim_{t\to-\infty}\mathbf{r}(t) = (-\infty,\infty,0)$. Pontosabban, a görbe $\pm\infty$-ben a $(t,t^2,0)$, $xy$-síkbeli parabolát közelíti, ugyanis a két függvény különbsége $\mathbf{0}$-hoz tart.

b) $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$ tanult limesz, $\lim\limits_{t\to 0}\frac{t^2+t}{t}=\lim\limits_{t\to 0}t+1=1$, és $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{t^2}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{-\sin t}{2t}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{-\cos t}{2}=-\frac{1}{2}$. Az utóbbiban kétszer alkalmaztuk a l'Hospital-szabályt $\frac{0}{0}$ típusú limeszre. Tehát $\lim\limits_{t\to 0}\mathbf{r}(t)=(1,1,-\frac{1}{2})$.

c) Az első két komponensben alkalmazhatjuk a l'Hospital-szabályt $\frac{\infty}{\infty}$ típusú limeszekre: $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{t^2}{e^t}=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{2t}{e^t}=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{2}{e^t}=0$, és $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{2t^2+2t+3}{3t^2-2}=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{4t+2}{6t}=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, az utolsónál pedig bővíteni kell a négyzetgyökök összegével: $\lim\limits_{t\to\infty}\sqrt{t+1}-\sqrt{t}=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{t+1}-\sqrt{t})(\sqrt{t+1}+\sqrt{t})}{\sqrt{t+1}+\sqrt{t}}=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{(t+1)-t}{\sqrt{t+1}+\sqrt{t}}=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{\sqrt{t+1}+\sqrt{t}}=0$. Tehát a limesz $\lim\limits_{t\to\infty}\mathbf{r}(t)=(0,\frac{2}{3},0)$.

**6.** *Számítsuk ki az 1. és 2. feladat paraméterezett görbéire a sebességvektorokat és a görbementi sebességet!*

*Megoldás:* 1./I.: $\dot{\mathbf{r}}(t)=(-\sin t,\cos t)$, $\quad|\dot{\mathbf{r}}(t)|=1$.

1./II.: $\dot{\mathbf{r}}(t)=\left(1,\ -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right)$, $\quad|\dot{\mathbf{r}}(t)|=\sqrt{1+\frac{t^2}{1-t^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.

1./III.: $\dot{\mathbf{r}}(t)=(-2\sin 2t,2\cos 2t)$, $\quad|\dot{\mathbf{r}}(t)|=2$.

1./IV.: A $(0,\pi)$ intervallumon $\dot{\mathbf{r}}(t)=(-\sin t,\cos t)$, a $(\pi,2\pi)$ intervallumon $\dot{\mathbf{r}}(t)=(-\sin t,-\cos t)$. A görbementi sebesség mindkét esetben 1, csak $\pi$-ben nem létezik a derivált.

2./a): $\dot{\mathbf{r}}(t)=(-2\sin t,2\cos t,1)$, $\quad|\dot{\mathbf{r}}(t)|=\sqrt{4\sin^2 t+4\cos^2 t+1}=\sqrt{5}$.

2./b): $(2t,2t,-8t)=2t(1,1,-4)$, $\quad|\dot{\mathbf{r}}(t)|=2|t|\sqrt{18}=6\sqrt{2}|t|$.

**7.** *Határozzuk meg a megadott görbék érintőjének egyenletrendszerét a $t_0$ paraméterű pontban!*

*a)* $\mathbf{r}(t)=(t^2\,,\ \dfrac{t+1}{t}\,,\ \dfrac{t}{t+1})$, $\ t_0=1$

*b)* $\mathbf{r}=\left(\dfrac{1}{1-t}\,,\ \ln(1+t^2)\,,\ e^{-t}\right)$, $\ t_0=0$.

*Megoldás:* a) $\dot{\mathbf{r}}(t)=\left(2t,-\frac{1}{t^2},\frac{1}{(t+1)^2}\right)$, így az érintő egyenes átmegy az $\mathbf{r}(1)=(1,2,\frac{1}{2})$ ponton, és az irányvektora $\dot{\mathbf{r}}(1)=(2,-1,\frac{1}{4})$, az egyenletrendszere pedig $x=1+2s$, $y=2-s$, $z=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}s$ $(s\in\mathbb{R})$.

b) $\dot{\mathbf{r}}(t)=\left(\frac{1}{(1-t)^2},\frac{2t}{1+t^2},-e^{-t}\right)$, tehát az érintő egyenes átmegy az $\mathbf{r}(0)=(1,0,1)$ ponton, az irányvektora $\dot{\mathbf{r}}(0)=(1,0,-1)$, az egyenletrendszere pedig $x=1+s$, $y=0$, $z=1-s$ $(s\in\mathbb{R})$.

**8.** *Milyen görbét ír le az $\mathbf{r}(t)=(t^3,\sqrt{t^6})$ paraméterezés? Differenciálható-e az $\mathbf{r}(t)$ függvény a $t=0$ pontban? Van-e ott a görbének érintője?*

*Megoldás:* $\mathbf{r}(t)=(t^3,\sqrt{t^6})=(t^3,|t^3|)$ az $y=|x|$ függvénygörbét paraméterezi. Ennek 0-ban nincs érintője, de a paraméterező függvény differenciálható itt: $\dot{\mathbf{r}}(0)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\mathbf{r}(t)-\mathbf{0}}{t-0}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{(t^3,|t^3|)}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{(t^3,t^2|t|)}{t}=\lim\limits_{t\to 0}(t^2,t|t|)=(0,0)$. (Érintőt csak nem nulla érintővektor definiál.)

**9.** *Számítsuk ki a megadott görbedarabok ívhosszát!*

*a)* $\mathbf{r}(t)=(t,2\sqrt{t^3},t\sqrt{8})$, $\ 0\le t\le 3$

*b)* $\mathbf{r}(t)=(\cos t+t\sin t,\sin t-t\cos t,t)$, $\ 0\le t\le 1$.

*Megoldás:* a) $\mathbf{r}(t)=(t,2t^{3/2},t\sqrt{8})$, $\ \dot{\mathbf{r}}(t)=(1,3t^{1/2},\sqrt{8})$, $\ |\dot{\mathbf{r}}(t)|=\sqrt{1+9t+8}=3\sqrt{t+1}$, az ívhossz $\int_0^3|\dot{\mathbf{r}}(t)|\,dt=\int_0^3 3(t+1)^{1/2}\,dt=\left[2(t+1)^{3/2}\right]_0^3=16-2=14$.

b) $\dot{\mathbf{r}}(t)=(-\sin t+\sin t+t\cos t,\ \cos t-\cos t+t\sin t,\ 1)=(t\cos t,t\sin t,1)$, $\ |\dot{\mathbf{r}}(t)|=\sqrt{t^2\cos^2 t+t^2\sin^2 t+1}=\sqrt{t^2+1}$, az ívhossz $\int_0^1|\dot{\mathbf{r}}(t)|\,dt=\int_0^1\sqrt{t^2+1}\,dt$. A négyzetgyököt egyszerűsíthetjük, ha $t=\operatorname{sh}u$, $\ dt=\operatorname{ch}u\,du$ helyettesítést végzünk.

$\int\sqrt{t^2+1}\,dt=\int\sqrt{(\operatorname{sh}u)^2+1}\cdot\operatorname{ch}u\,du=\int\operatorname{ch}^2 u\,du=\int\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{ch}2u\,du=\frac{1}{2}u+\frac{1}{4}\operatorname{sh}2u+C=\frac{1}{2}\operatorname{arsh}t+\frac{1}{2}\operatorname{sh}u\operatorname{ch}u+C=\frac{1}{2}\ln(t+\sqrt{t^2+1})+\frac{1}{2}t\sqrt{t^2+1}+C$,

így $\int_0^1|\dot{\mathbf{r}}(t)|\,dt=\left[\frac{1}{2}\ln(t+\sqrt{t^2+1})+\frac{1}{2}t\sqrt{t^2+1}\right]_0^1=\frac{1}{2}(\ln(1+\sqrt{2})+\sqrt{2})$.

**10.** *Térjünk át ívhosszparaméterre a következő görbéknél!*

*a)* $\mathbf{r}(t) = (t, 2\sqrt{t^3}, t\sqrt{8}),\quad 0 \le t \le 3$

*b)* $\mathbf{r}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t),\quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

*Megoldás:* a) A 9.a) feladat megoldása szerint $|\dot{\mathbf{r}}(t)| = 3\sqrt{t+1}$, tehát ha $s$ az $\mathbf{r}(0)$-tól $\mathbf{r}(t)$-ig megtett út ívhossza, akkor $s = \int\limits_0^t 3\sqrt{\tau+1}\,d\tau = \left[2(\tau+1)^{3/2}\right]_0^t = 2(t+1)^{3/2} - 2$, így $t = (\frac{s}{2}+1)^{2/3} - 1$. Ezt az $\mathbf{r}(t)$ függvénybe behelyettesítve kapjuk a görbe ívhosszparaméterezését:
$\mathbf{r} = \left((\frac{s}{2}+1)^{2/3} - 1\,,\ 2\left((\frac{s}{2}+1)^{2/3} - 1\right)^{3/2}\,,\ \left((\frac{s}{2}+1)^{2/3} - 1\right)\sqrt{8}\right)$.

b) $\dot{\mathbf{r}}(t) = (3\cos^2 t(-\sin t)\,,\ 3\sin^2 t\cos t\,,\ 2(-\sin 2t))$, $|\dot{\mathbf{r}}(t)|^2 = 9\cos^4 t\sin^2 t + 9\sin^4 t\cos^2 t + 4\sin^2 2t = 9\sin^2 t\cos^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t) + 16\sin^2 t\cos^2 t = 25\sin^2 t\cos^2 t$, így $|\dot{\mathbf{r}}(t)| = 5|\sin t\cos t| = 5\sin t\cos t$, ha $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, mert itt $\sin t,\ \cos t \ge 0$. Tehát az $\mathbf{r}(0)$-tól $\mathbf{r}(t)$-ig terjedő ívhossz $s = \int\limits_0^t 5\sin\tau\cos\tau\,d\tau = \left[\frac{5}{2}(\sin^2\tau)\right]_0^t = \frac{5}{2}\sin^2 t$, tehát $t = \arcsin\sqrt{\frac{2}{5}s}$, és az ívhosszparaméterezés $\mathbf{r} = \left(\cos^3\left(\arcsin\sqrt{\frac{2}{5}s}\right)\,,\ \sin^3\left(\arcsin\sqrt{\frac{2}{5}s}\right)\,,\ \cos\left(2\arcsin\sqrt{\frac{2}{5}s}\right)\right) = \left(\left(1-\frac{2}{5}s\right)^{3/2},\ \left(\frac{2}{5}s\right)^{3/2},\ 1-\frac{4}{5}s\right)$.