1. *Bizonyítsuk be, hogy a* $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (2x + 6xz,\ -2y,\ 3x^2 - 3z^2)$ *vektor-vektorfüggvény forrásmentes és örvénymentes is.*

Megoldás: $\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{r}) = 2 + 6z - 2 - 6z = 0$, tehát $\mathbf{v}$ forrásmentes.
$\mathbf{rot}\,\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (0 - 0,\ 6x - 6x,\ 0 - 0) = \mathbf{0}$, tehát $\mathbf{v}$ örvénymentes.

2. *Számítsuk ki a következő vektor-vektorfüggvények felületi integrálját a megadott felületeken!*

a) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (x,\ -y,\ z)$, $\mathcal{F}:\ \mathbf{r}(u,v) = (u + 2v,\ v,\ u - v)$, $0 \le u \le 3$, $0 \le v \le 1$, *a normálvektorok lefelé mutatnak*

b) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}|\mathbf{r}|^3$, $\mathcal{F}:\ x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \ge 0$, *felfelé irányítva*

c) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (x, y, z)$, $\mathcal{F}:\ \mathbf{r}(u,v) = (3\cos v,\ 3\cos u \sin v,\ \sin u)$, $0 \le u \le \pi$, $0 \le v \le 2\pi$, $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$*-vel irányítva.*

Megoldás: a) $\mathbf{v}(\mathbf{r}(u,v)) = (u + 2v,\ -v,\ u - v)$, $\mathbf{r}_u = (1,0,1)$, $\mathbf{r}_v = (2,1,-1)$
$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (-1,3,1)$, $\mathbf{v}(\mathbf{r}(u,v))(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) = -u - 2v - 3v + u - v = -6v$.
Mivel $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ felfelé mutat, $\int\limits_{\mathcal{F}} \mathbf{v}\,\mathbf{dF} = -\int\limits_0^1\int\limits_0^3 -6v\,du\,dv = \int\limits_0^1 18v\,dv = \Big[9v^2\Big]_0^1 = 9.$

b) *1. megoldás:* A felület egy origó középpontú, 2 sugarú gömb felső fele, tehát érdemes gömbi koordinátákkal paraméterezni: $\mathbf{r}(\varphi,\vartheta) = (2\cos\varphi\sin\vartheta,\ 2\sin\varphi\sin\vartheta,\ 2\cos\vartheta)$.
$\mathbf{r}_\varphi = (-2\sin\varphi\sin\vartheta,\ 2\cos\varphi\sin\vartheta, 0)$
$\mathbf{r}_\vartheta = (2\cos\varphi\cos\vartheta,\ 2\sin\varphi\cos\vartheta,\ -2\sin\vartheta)$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}$,
$\mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_\vartheta = (-4\cos\varphi\sin^2\vartheta,\ -4\sin\varphi\sin^2\vartheta,\ -4\sin\vartheta\cos\vartheta)$ lefelé mutat.
$\mathbf{v}(\mathbf{r}(\varphi,\vartheta)) = (2\cos\varphi\sin\vartheta,\ 2\sin\varphi\sin\vartheta,\ 2\cos\vartheta)\cdot 8$,
$\mathbf{v}(\mathbf{r}(\varphi,\vartheta))(\mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_\vartheta) = 8(-8\cos^2\varphi\sin^3\vartheta - 8\sin^2\varphi\sin^3\vartheta - 8\sin\vartheta\cos^2\vartheta) =$
$= 8(-8\sin^3\vartheta - 8\sin\vartheta\cos^2\vartheta) = 8(-8\sin\vartheta) = -64\sin\vartheta.$

$$\int\limits_{\mathcal{F}} \mathbf{v}(\mathbf{r})\,\mathbf{dF} = -\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{2\pi} -64\sin\vartheta\,d\varphi\,d\vartheta = 128\pi\int\limits_0^{\pi/2}\sin\vartheta\,d\vartheta = \Big[-128\pi\cos\vartheta\Big]_0^{\pi/2} = 128\pi.$$

2. megoldás: Bár a felület nem zárt, használhatjuk a Gauss-Osztrogradszkij-tételt is olyan módon, hogy kiszámoljuk vele a félgömb teljes felületén az integrált, majd abból kivonjuk a félgömb alapján vett felületi integrált (ha azt egyszerű kiszámolni).
$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}|\mathbf{r}|^3 = (x,y,z)(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$.
$\frac{\partial}{\partial x}x(x^2+y^2+z^2)^{3/2} = (x^2+y^2+z^2)^{3/2} + x\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}2x = (4x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$,
és a változók permutálásával megkapjuk a másik két komponens deriváltját.
Ebből $\operatorname{div}\mathbf{v} = (6x^2 + 6y^2 + 6z^2)(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = 6|\mathbf{r}|^3$,
és $\operatorname{div}\mathbf{v}$ integrálja a félgömbön (polárkoordinátákkal): $\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^2 6R^3\cdot R^2\sin\vartheta\,dR\,d\varphi\,d\vartheta =$
$$\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{2\pi}\Big[R^6\sin\vartheta\Big]_0^2 d\varphi\,d\vartheta = \int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{2\pi} 64\sin\vartheta\,d\varphi\,d\vartheta = \int\limits_0^{\pi/2} 128\pi\sin\vartheta\,d\vartheta = \Big[-128\pi\cos\vartheta\Big]_0^{\pi/2} = 128\pi.$$
A félgömb alapján viszont 0 a felületi integrál, mert $\mathbf{b} = \mathbf{r}|\mathbf{r}|^3$ párhuzamos a körlap síkjával, tehát mindenhol merőleges annak a normálvektorára, $\mathbf{k}$-ra. Tehát az eredeti $\mathcal{F}$ felületen megegyezik a $\mathbf{v}$ integrálja a félgömb teljes felületén vett integrállal, azaz 128π-vel.

c) $\mathbf{r}_u = (0,\ -3\sin u\sin v,\ \cos u)$, $\mathbf{r}_v = (-3\sin v,\ 3\cos u\cos v,\ 0)$,
$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (-3\cos^2 u\cos v,\ -3\cos u\sin v, -9\sin u\sin^2 v)$,
$\mathbf{v}(\mathbf{r}(u,v)) = (3\cos v,\ 3\cos u\sin v,\ \sin u)$,
$\mathbf{v}(\mathbf{r}(u,v))(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) = -9\cos^2 u\cos^2 v - 9\cos^2 u\sin^2 v - 9\sin^2 u\sin^2 v =$
$-9\cos^2 u - 9\sin^2 u\sin^2 v = -9\cos^2 u - 9\sin^2 u + 9\sin^2 u\cos^2 v = -9 + 9\sin^2 u\cos^2 v$
$$\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} -9 + 9\sin^2 u\cos^2 v\,dv\,du = \int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} -9 + \tfrac{9}{2}(\sin^2 u)(1 + \cos 2v)\,dv\,du =$$
$$\int\limits_0^{\pi}\Big[-9v + \tfrac{9}{2}(\sin^2 u)v + \tfrac{9}{4}\sin^2 u\sin 2v\Big]_0^{2\pi} du = \int\limits_0^{\pi} -18\pi + 9\pi\sin^2 u\,du =$$
$$\int\limits_0^{\pi} -18\pi + \tfrac{9}{2}\pi(1 - \cos 2u)\,du = \Big[-\tfrac{27}{2}\pi u - \tfrac{9}{4}\pi\sin 2u\Big]_0^{\pi} = -\tfrac{27}{2}\pi^2.$$

3. *Számítsuk ki a következő zárt felületeken a felületi integrált (használjuk a Gauss–Osztrogradszkij-tételt)*

a) $\iint\limits_{\mathcal{F}} (xz, xy, yz)\,\mathbf{dF}$, *ahol* $\mathcal{F}$ *a* $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ *felület és a* $z = 0$ *sík által határolt tartomány felülete, befelé mutató normálvektorokkal;*

b) $\iint\limits_{\mathcal{F}} (x^3, y^3, z^3)\,\mathbf{dF}$, *ahol* $\mathcal{F}$ *az* $x^2+y^2+z^2 = 1$ *egyenletű gömbfelület, kifelé mutató normálvektorokkal;*

c) $\iint\limits_{\mathcal{F}} (xe^z, ze^x, ye^y)\,\mathbf{dF}$, *ahol* $\mathcal{F}$ *a* $3z^2 = x^2+y^2$ *kúp felső térfélbe eső része és az* $x^2+y^2+z^2 = 4$ *gömb által határolt térbeli tartomány teljes felülete kifelé mutató normálvektorokkal!*

Megoldás: a) $\operatorname{div}\mathbf{v} = z + x + y$, a felület által határolt tartomány pedig az origó középpontú, 1 sugarú gömb fölső fele. Számíthatjuk ezen a $\operatorname{div}\mathbf{v}$ integrálját gömbi vagy hengerkoordinátákkal.

1. megoldás: gömbi koordinátákkal.

A normálvektor befelé mutat, ezért $\int\limits_{\mathcal{F}} \mathbf{v}\,\mathbf{dF} = -\int\limits_{V} \operatorname{div}\mathbf{v}\,dV =$

$$= -\int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_0^{2\pi} (R\cos\varphi\sin\vartheta + R\sin\varphi\sin\vartheta + R\cos\vartheta)R^2\sin\vartheta\,d\varphi\,dR\,d\vartheta =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 \Big[-R^3\sin^2\vartheta\sin\varphi + R^3\sin^2\vartheta\cos\varphi - \varphi R^3\sin\vartheta\cos\vartheta\Big]_0^{2\pi} dR\,d\vartheta =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 -2\pi R^3\sin\vartheta\cos\vartheta\,dR\,d\vartheta = \int_0^{\pi/2}\Big[-\tfrac{\pi}{2}R^4\sin\vartheta\cos\vartheta\Big]_0^1 d\vartheta = \int_0^{\pi/2} -\tfrac{\pi}{2}\sin\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta =$$

$$= \Big[-\tfrac{\pi}{4}\sin^2\vartheta\Big]_0^{\pi/2} = -\tfrac{\pi}{4}$$

2. megoldás: hengerkoordinátákkal.

$$\int\limits_{\mathcal{F}} \mathbf{v}\,\mathbf{dF} = -\int\limits_{V} \operatorname{div}\mathbf{v}\,dV = -\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-r^2}}\int_0^{2\pi} (r\cos\varphi + r\sin\varphi + m)r\,d\varphi\,dm\,dr =$$

$$= \int_0^1\int_0^{\sqrt{1-r^2}} \Big[-r^2\sin\varphi + r^2\cos\varphi - mr\varphi\Big]_0^{2\pi} dm\,dr = \int_0^1\int_0^{\sqrt{1-r^2}} -2\pi mr\,dm\,dr =$$

$$= \int_0^1 \Big[-\pi m^2 r\Big]_0^{\sqrt{1-r^2}} dr = \int_0^1 -\pi(1-r^2)r\,dr = \int_0^1 \pi(r^3-r)\,dr = \pi\Big[\tfrac{1}{4}r^4 - \tfrac{1}{2}r^2\Big]_0^1 = -\tfrac{\pi}{4}.$$

b) $\operatorname{div}\mathbf{v} = 3x^2+3y^2+3z^2$, tehát a kiszámítandó integrál $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1} 3x^2+3y^2+3z^2\,dx\,dy\,dz$. Gömbi koordinátákra áttérve:

$$\int_0^1\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} 3R^2\cdot R^2\sin\vartheta\,d\varphi\,d\vartheta\,dR = \int_0^1\int_0^{\pi} 6\pi R^4\sin\vartheta\,d\vartheta\,dR = \int_0^1 \Big[-6\pi R^4\cos\vartheta\Big]^{\pi} dR = \int_0^1 12\pi R^4\,dR = \tfrac{12}{5}\pi.$$

c) $\operatorname{div}\mathbf{v} = e^z$, tehát ezt kell a kúp és a gömbfelület által határolt térbeli tartományon integrálni. Érdemes áttérni gömbi koordinátákra. A kúp egyenlete gömbi koordinátákkal felírva (a $4z^2 = x^2+y^2+z^2$ alakból) $4R^2\cos^2\vartheta = R^2$, azaz $4\cos^2\vartheta = 1$, és ezt tovább alakítva $\theta = \frac{\pi}{3}$, a gömbé pedig $R = 2$. Így a kiszámítandó integrál:

$$\int_0^2\int_0^{\pi/3}\int_0^{2\pi} e^{R\cos\vartheta}R^2\sin\vartheta\,d\varphi\,d\vartheta\,dR = \int_0^2\int_0^{\pi/3} 2\pi e^{R\cos\vartheta}R^2\sin\vartheta\,d\vartheta\,dR = \int_0^2 \big[-2\pi Re^{R\cos\vartheta}\big]_0^{\pi/3} dR =$$

$$\int_0^2 -2\pi Re^{R/2} + 2\pi Re^R\,dR = \Big[-4\pi Re^{R/2}\Big]_0^2 + \int_0^2 4\pi e^{R/2}\,dR + \Big[2\pi Re^R\Big]_0^2 - \int_0^2 2\pi e^R\,dR =$$

$$= \Big[-4\pi Re^{R/2} + 8\pi e^{R/2} + 2\pi Re^R - 2\pi e^R\Big]_0^2 = 2\pi e^2 - 6\pi.$$

4. *Számítsuk ki a következő zárt görbéken az integrált Stokes-tétellel és anélkül:*

a) a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (y^2, z^2, x^2)$ *függvény integrálja az* $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ *és* $C(0,0,1)$ *pontokon, majd újra az* A *ponton keresztülhaladó zárt törtvonal mentén;*

b) a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (x, x+y, x+y+z)$ függvény integrálja az $x^2+y^2 = 4$, $z = 2$ egyenletekkel meghatározott körvonalon, pozitív irányban.

Megoldás: a) A három görbedarab: $\mathcal{G}_1 : \mathbf{r}(t) = (1-t,\ t, 0)$, $\mathcal{G}_2 : \mathbf{r}(t) = (0,\ 1-t,\ t)$ és $\mathcal{G}_3 : \mathbf{r}(t) = (t,\ 0,\ 1-t)$, mindegyiknél $0 \le t \le 1$. A három részintegrál:

$$\int_{\mathcal{G}_1} \mathbf{v}\,d\mathbf{r} = \int_0^1 (t^2,\ 0,\ (1-t)^2)(-1,1,0)\,dt = \int_0^1 -t^2\,dt = \left[-\tfrac{1}{3}t^3\right]_0^1 = -\tfrac{1}{3},$$

$$\int_{\mathcal{G}_2} \mathbf{v}\,d\mathbf{r} = \int_0^1 ((1-t)^2,\ t^2,\ 0)(0,-1,1)\,dt = \int_0^1 -t^2\,dt = \left[-\tfrac{1}{3}t^3\right]_0^1 = -\tfrac{1}{3},$$

$$\int_{\mathcal{G}_3} \mathbf{v}\,d\mathbf{r} = \int_0^1 (0,\ (1-t)^2, t^2)(1,0,-1)\,dt = \int_0^1 -t^2\,dt = \left[-\tfrac{1}{3}t^3\right]_0^1 = -\tfrac{1}{3},$$

így a teljes integrál értéke -1.

Stokes-tétellel a $\mathbf{rot}\,\mathbf{v} = (-2z,\ -2x,\ -2y)$ függvényt kell integrálni az $x+y+z = 1$ síkban elhelyezkedő háromszög alakú felületen. A felületet paraméterezhetjük x-szel és y-nal: $\mathbf{r}(x,y) = (x,\ y,\ 1-x-y)$, $\mathbf{r}_x = (1,0,-1)$, $\mathbf{r}_y = (0,1,-1)$, $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = (1,1,1)$, és ez éppen megfelelő irányba mutat a Stokes-tételhez.

$\mathbf{rot}\,\mathbf{v}(\mathbf{r}(x,y)) = (-2+2x+2y, -2x, -2y)$, $\mathbf{v}(\mathbf{r}(x.y))(\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y) = -2+2x+2y-2x-2y = -2$, az integrálási tartomány pedig a háromszögnek az xy-síkra vett vetülete: a koordinátatengelyek és az $y = 1-x$ által határolt derékszögű háromszög. Mivel a konstans -2 függvényt kell integrálni, az integrál értéke a háromszög területének -2-szerese, azaz -1.

b) $\mathbf{r}(t) = (2\cos t,\ 2\sin t,\ 2)$ $(0 \le t \le 2\pi)$, $\dot{\mathbf{r}}(t) = (-2\sin t,\ 2\cos t,\ 0)$,
$\mathbf{v}(\mathbf{r}(t)) = (2\cos t,\ 2\cos t + 2\sin t,\ 2 + 2\cos t + 2\sin t)$,
$\mathbf{v}(\mathbf{r}(t))\dot{\mathbf{r}}(t) = 4\cos^2 t$,

$$\int_{\mathcal{G}} \mathbf{v}(\mathbf{r})\ d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} 4\cos^2 t\,dt = \int_0^{2\pi} 2 + 2\cos 2t\,dt = [2t + \sin 2t]_0^{2\pi} = 4\pi.$$

vagy Stokes-tétellel:
$\mathbf{rot}(\mathbf{v}) = (1,-1,1)$,
és a sík $\mathbf{r}(x,y) = (x,y,2)$ paraméterezéséhez a normálvektor $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = (0,0,1)$, a paramétertartomány pedig $x^2+y^2 \le 4$

$\iint_{\mathcal{F}} (1,-1,1)(0,0,1)\,d\mathbf{F} = \iint_{\mathcal{F}} 1\,d\mathbf{F}$, ez pedig az $x^2+y^2 \le 4$ kör területe, azaz 4π.

5. *A Green-tétel felhasználásával számítsuk ki a*

a) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (3x^2e^{y^2}, 2x^3ye^{y^2})$ függvény integrálját a $\mathcal{G}$: $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \le t \le \pi$ görbe mentén;

b) a $\mathbf{v} = (xy^2 + 3y, -x^2y)$ függvény integrálját az $A(-2,0)$, $B(0,1)$, $C(2,0)$ pontokon keresztülhaladó töröttvonal mentén.

Megoldás: a) $\dfrac{\partial v_2}{\partial x} - \dfrac{\partial v_1}{\partial y} = 6x^2ye^{y^2} - 6x^2ye^{y^2} = 0$, ezért az integrál minden zárt görbén 0, vagy másképp fogalmazva, az integrál értéke csak a végpontoktól függ. Kicserélhetjük a görbét az $(1,0)$-ból $(-1,0)$-ba menő irányított szakaszra. Ennek paraméterezése $\mathbf{r}(t) = (1-2t, 0)$ $(0 \le t \le 1)$. Erre $\dot{\mathbf{r}}(t) = (-2,0)$, $\mathbf{v}(\mathbf{r}(t)) = (3(1-2t)^2, 0)$, és az integrál $\int_0^1 -6(1-2t)^2\,dt = \left[-6\tfrac{1}{3}(1-2t)^3(-\tfrac{1}{2})\right]_0^1 = \left[(1-2t)^3\right]_0^1 = -2$. De potenciálfüggvénnyel is megoldhatjuk a feladatot: $\mathbf{v}$ potenciálfüggvénye $x^3e^{y^2}$, és $\left[x^3e^{y^2}\right]_{(1,0)}^{(-1,0)} = -2$.

b) Az AC szakaszon a függvény végig 0, tehát ott az integrálja is 0. Ez azt jelenti, hogy a keresett integrál ugyanaz, mintha lezárnánk a háromszöget, és a zárt ABC háromszögvonalon integrálnánk negatív irányban. $\dfrac{\partial v_2}{\partial x} - \dfrac{\partial v_1}{\partial y} = 3$, és a felület az 2 területű ABC háromszögtartomány, tehát az integrál $-3 \cdot 2 = -6$.