

1. (10 pont) Határozzuk meg az alábbi hatványsor konvergenciasugarát és adjuk meg a konvergenciakör középpontját:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(i + \frac{3i}{n}\right)^{n^2} \frac{(z-2)^n}{5}.$$

2. (10 pont) Mely pontokban differenciálható, illetve reguláris az alábbi függvény?

$$f(z) = (\operatorname{Re} z)^2 + i(\operatorname{Im} z)^2 - iz.$$

3. (10 pont) Határozzuk meg azt az $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ értelmezési tartományán reguláris komplex függvényt, amelynek a megadott $u(x, y)$ függvény a valós része, és $f(1+i) = 1-i$, valamint adjuk meg az f függvény deriváltját is:

$$u(x, y) = xy - x + y.$$

4. (10 pont) Számítsuk ki az $f(z) = |z|^2$ függvény integrálját a $z = 2$ pontból a $z = 2i$ pontba vezető pozitívan irányított negyedkörív, és a $z = 2i$ pontból a $z = 2$ pontba vezető egyenes szakaszból álló zárt görbe mentén! Adjuk meg a megoldást algebrai alakban is.

5. (10 pont) Számítsuk ki az alábbi függvény integrálját a $|z+i| = 3$ pozitívan irányított görbe mentén!

$$f(z) = \frac{\sin 2z}{z^6 + 9z^4} + e^{\cos z}$$

6. (10 pont) Adjuk meg algebrai alakban az összes olyan z komplex számot, amelyre teljesül, hogy

$$\cos e^z = -1.$$