MATEMATIKA A3 – II. vizsga – 2017-01-04 Név: ______________________

1	2	3	4	5	6	7	8	9

$\sum$:

1. *(1+1+3+2)* Egészítsük ki az alábbi állításokat és definíciókat:

a) Az $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ ívhosszparaméterrel megadott görbe görbülete:

$\kappa(s) = |\mathbf{r''(s)}|$

b) Ha $u, v \in \mathbb{C}$, akkor definíció szerint

$u^v = \mathbf{e^{v \ln u}}$

c) (Cauchy-féle integráltétel)

Ha T ......**egyszeresen összefüggő**...... nyílt halmaz, és f ......**reguláris**...... a T halmazon, akkor minden T-ben fekvő ......**zárt**...... $\mathcal{G}$ görbén $\int_{\mathcal{G}} f(z)dz = 0$.

d) Az $y_1, \ldots, y_n$ függvények alaprendszerét adják az $a_n(x)y^{(n)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$ lineáris differenciálegyenletnek, ha

$$\mathbf{a_n(x)y_i^{(n)}} + \ldots + \mathbf{a_1(x)y_i'} + \mathbf{a_0(x)y_i} = \mathbf{0} \qquad (\mathbf{i} = \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{n})$$

és

$\mathbf{y_1}, \ldots, \mathbf{y_n}$ **lineárisan függetlenek**

2. *(2+2+4)*

a) Mi a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (x^2, y - 2xz, \cos z)$ függvény rotációja?

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & y - 2xz & \cos z \end{vmatrix} =$$

$$= (0 - (-2x),\ 0 - 0,\ -2z - 0) = (2x,\ 0,\ -2z)$$

b) Írjuk fel algebrai alakban a $\operatorname{ch} \frac{\pi i}{2} + \operatorname{sh} \frac{\pi i}{2}$ komplex számot!

$$\operatorname{ch} \frac{\pi i}{2} + \operatorname{sh} \frac{\pi i}{2} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$$

c) Milyen alakban kereshetjük az állandó együtthatós inhomogén lineáris differenciálegyenlet partikuláris megoldását, ha a karakterisztikus egyenlet $m^2(m-i)(m+i) = 0$, és a konstans tag

- $f(x) = x + 5$

  $(Ax + B) \cdot x^2$

  mert 0 kétszeres gyöke a karakt. egy.-nek
- $f(x) = \cos x$

  $(A \cos x + B \sin x) \cdot x$,

  mert i egyszeres gyöke a karakt. egy.-nek

3. *(5)* Számítsuk ki a $\underline{v}(x, y) = (-y, x)$ függvény görbementi integrálját az origó középpontú, egység sugarú, felső félsíkban fekvő félkörön pozitív irányban haladva!

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t), \quad (0 \le t \le \pi)$$

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = (-\sin t, \cos t)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}(t)) = (-\sin t, \cos t)$$

$$\int_{\mathcal{G}} \mathbf{v}(\mathbf{r})\mathbf{dr} = \int_0^\pi \mathbf{v}(\mathbf{r}(t))\dot{\mathbf{r}}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \sin^2 t + \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi 1\,\mathrm{d}t = \pi$$

4. *(5)* Számítsuk ki a $\underline{v}(x, y, z) = (x^2, xy, z)$ függvény felületi integrálját a $0 \le x, y, z \le 2$ kocka teljes felületén, kifelé mutató normálvektorokkal!

Gauss–Osztrogradszkij-tétellel

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{r}) = 2x + x + 1 = 3x + 1$$

$$\int_0^2 \int_0^2 \int_0^2 3x + 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^2 \int_0^2 \left[\frac{3}{2}x^2 + x\right]_0^2 \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z =$$

$$= \int_0^2 \int_0^2 8\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^2 16\,\mathrm{d}z = 32$$

5. *(5)* Határozzuk meg a következő komplex integrál értékét!

$$\oint_{|z| \le 2} \frac{e^{\pi z}}{(z+i)^3}\ \mathrm{d}z$$

Az integrandus egyetlen szingularitása $-i$, ami benne van a körben, így a Cauchy-integrálformula szerint

$$\oint_{|z| \le 2} \frac{e^{\pi z}}{(z+i)^3}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{2!}(e^{\pi z})''\Big|_{z=-i} = \pi^3 i e^{\pi z}\Big|_{z=-i} =$$

$$= \pi^3 i e^{-\pi i} = \pi^3 i(-1)^{-1} = -i$$

6. *(6)* Oldjuk meg az $y'yx = y^2+1$, $y(1) = 1$ kezdetiérték-problémát!

Szétválasztható.

$$\frac{y'y}{y^2+1} = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{y}{y^2+1}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{2}\ln(y^2+1) = (\ln|x|) + C = \ln|x|e^C$$

$$\ln(y^2+1) = \ln(x^2e^{2C})$$

$$y = \pm\sqrt{Ax^2-1} \quad (A > 0)$$

$$1 = y(1) = \sqrt{A-1} \implies A = 2$$

$$y = \sqrt{2x^2-1}$$

7. *(8)* Oldjuk meg az $y'' - 5y' + 6y = 3x^2 + x - 4$ differenciálegyenletet!

Karakt. egy.:

$$m^2 - 5m + 6 = (m-2)(m-3) = 0$$

Gyökei: 2, 3 egyszeresek.
A homogén d.e. megoldása: $y_y = c_1e^{2x} + c_2e^{3x}$

Próbafüggvény az inhomogén d.e.-hez:

$$y_p = Ax^2 + Bx + C \quad \text{(nincs rezonancia)}$$

$$y_p' = 2Ax + B$$

$$y_p'' = 2A$$

Behelyettesítve az inhomogén egyenletbe:

$$2A - 5(2Ax+B) + 6(Ax^2+Bx+C) = 3x^2 + x - 4$$
$$6Ax^2 + (-10A+6B)x + (2A-5B+6C = 3x^2 + x - 4$$
$$A = \tfrac{1}{2}, \quad B = 1, \ C = 0$$
$$y = \tfrac{1}{2}x^2 + x + c_1e^{2x} + c_2e^{3x}.$$

8. *(10)* Írjuk fel a Cauchy–Riemann-differenciálegyenleteket, és bizonyítsuk be ezek szükségességét a komplex függvény differenciálhatóságához!

Tétel: Ha $f(z) = f(x+yi) = u(x,y) + iv(x,y)$, ahol u, v valós függvények, és f differenciálható $z_0 = x_0 + iy_0$-ban, akkor $u_x = v_y$ és $u_y = -v_x$ az (x_0, y_0)-ban.
Biz.:

$$f'(z) = \lim_{w\to 0}\frac{f(z+w)-f(z)}{w} \quad \text{ahol } w \in \mathbb{C}$$

Ha $w = h$ valós:

$$f'(x+yi) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+yi+h)-f(x+yi)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h,y)-u(x,y)}{h} + i\frac{v(x+h,y)-v(x,y)}{h} =$$

$$= u_x(x,y) + iv_x(x,y)$$

Ha $w = hi$ tiszta képzetes:

$$f'(x+yi) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+yi+hi)-f(x+yi)}{hi} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{u(x,y+h)-u(x,y)}{hi} + i\frac{v(x,y+h)-v(x,y)}{hi} =$$

$$-iu_y(x,y) + v_y(x,y)$$

$$\implies u_x(x,y) + iv_x(x,y) = v_y(x,y) - iu_y(x,y)$$

$$\implies u_x = v_y \quad \text{és} \quad v_x = -u_y$$

9. *(6)* Vezessük le az x-től függő, egzakttá tevő multiplikátorra tanult képletet!

Tétel: Ha a $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ differenciálegyenletre $\frac{P_y - Q_x}{Q}$ csak x-től függ, akkor az $\ln M(x) = \int \frac{P_y - Q_x}{Q}\,\mathrm{d}x$ egyenletet kielégítő $M(x)$ fv.-nyel megszorozva a d.e.-et, egzakt differenciálegyenletet kapunk.
Biz.: Kell:

$$(M(x)P)_y = (M(x)Q)_x,$$

azaz

$$M(x)P_y = M'(x)Q + M(x)Q_x.$$

Átrendezve:

$$M'(x)Q = M(x)(P_y - Q_x)$$

$$\frac{M'(x)}{M(x)} = \frac{P_y - Q_x}{Q}$$

$$\ln M(x) = \int \frac{M'(x)}{M(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{P_y - Q_x}{Q}\,\mathrm{d}x$$