

1. Bizonyítsuk be, hogy egy H legalább kételemű halmaz részhalmazainak a halmaza, $P(H)$ nem alkot csoportot sem a metszet, sem az unió műveletére nézve, de csoportot alkot a szimmetrikus differenciára nézve ($A \triangle B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$)!
 2. Csoportot alkotnak-e az összeadásra vagy a szorzásra nézve
 - a) az 1 determinánsú $n \times n$ -es valós mátrixok;
 - b) a pozitív determinánsú $n \times n$ -es valós mátrixok;
 - c) a \mathbb{Z} fölötti $n \times n$ -es mátrixok;
 - d) a \mathbb{Z} fölötti nem 0 determinánsú $n \times n$ -es mátrixok;
 - e) a \mathbb{Z} fölötti 1 determinánsú $n \times n$ -es mátrixok;
 - f) az $n \times n$ -es valós felső háromszögmátrixok?
 3. Bizonyítsuk be, hogy ha egy S félcsoportban

van jobb oldali egységelem: $\exists e : xe = x \forall x$;

és minden elemnek van e -re nézve jobb oldali inverze: $\forall x \exists x' : xx' = e$,

 akkor S csoport.
 4. Bizonyítsuk be, hogy ha egy S félcsoport minden a, b elemére megoldható az $ax = b$ és az $ya = b$ egyenlet, akkor S csoport.
 5. Bizonyítsuk be, hogy egy egységelemes félcsoportban
 - a) ha a és b invertálható, akkor ab és ba is invertálható;
 - b) ha ab és ba invertálható, akkor a és b is invertálható.
 Adjunk példát arra, hogy ab invertálhatóságából nem feltétlenül következik a vagy b invertálhatósága.
 6. Bizonyítsuk be, hogy ha egy csoportban $x^2 = 1$ minden x elemre, akkor a csoport kommutatív!
 7. Hányadrendű elemek vannak
 - a) az $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ csoportban;
 - b) az \mathbb{R} additív csoportjában;
 - c) a $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ csoportban;
 - d) $GL_2(\mathbb{R})$ -ben;
 - e)* $GL_2(\mathbb{Q})$ -ban?
 8. Bizonyítsuk be, hogy egy páros elemszámú véges csoportban mindig van másodrendű elem!
 9. Határozzuk meg az $(1345)(236)(41)$ permutáció rendjét!
 10.
 - a) Hány tized- és negyedrendű elem van S_{10} -ben?
 - b) Mi az elemek rendjének maximuma S_8 -ban?
- Hf1.** Csoportot alkotnak-e a $(-1, 1)$ nyílt intervallum elemei az $a * b = \frac{a+b}{1+ab}$ műveletre mint szorzásra nézve?
- Hf2.** Hány 6-odrendű eleme van S_7 -nek?