1. Legyen G csoport, és $H \leq G$. Döntsük el, melyek igazak az alábbi állítások közül.

a) Mindig van olyan homomorfizmus G-ből, amelynek a magja H.
b) Ha $H \lhd G$, akkor van olyan homomorfizmus G-ből, amelynek a magja H.
c) Mindig van olyan homomorfizmus G-be, melynek a képe H.
d) Tetszőleges $\varphi : G \to K$ homomorfizmusnál $\varphi(H) \leq K$.
e) Ha $H \lhd G$, és $\varphi : G \to K$ homomorfizmus, akkor $\varphi(H) \lhd K$.
f) Ha $H \lhd G$, és $\varphi : G \to K$ homomorfizmus, akkor $\varphi(H) \lhd \varphi(G)$.
g) Tetszőleges $\varphi : G \to K$ homomorfizmusra $n \mid |G|$ esetén $n \mid |\varphi(G)|$.
h) Tetszőleges $\varphi : G \to K$ homomorfizmusra $|G| < \infty$ és $n \mid |\varphi(G)|$ esetén $n \mid |G|$.

2. Legyen $|G| = 91$. Hány olyan $G \to G$ homomorfizmus van, ami G-nek legalább két, különböző rendű, az egységtől különböző elemét 1-be viszi?

3. Bizonyítsuk be, hogy ha $N \lhd G$, és $H \leq G$ úgy, hogy $H \cap N = \{ 1 \}$ és $HN = G$, akkor $G/N \cong H$.

4. Határozzuk meg a D_4 diédercsoport részcsoportjait, normálsztóit, és faktorcsoportjait!

5. Legyen $H \leq G$ és $M, N \lhd G$. Bizonyítsuk be, hogy
a) $H \cap N \lhd H$; $N \cap M \lhd G$;
b) $HN \leq G$; $NM \lhd G$;
c) $M \leq N$ esetén G/N homomorf képe G/M-nek.

6. Legyen $N \lhd G$. Bizonyítsuk be, hogy a $H \mapsto H/N := \{ Nh \mid h \in H \}$ megfeleltetés bijekció a G csoport N-et tartalmazó részcsoportjai és a G/N faktorcsoport részcsoportjai között. Lássuk be azt is, hogy az előbb megadott bijekciónál a normálosztók egymásnak felelnek meg, és hogy ez a bijekció a részcsoportok közötti tartalmazási relációt is megőrzi.

7. Bizonyítsuk be, hogy ha $N \lhd G$, és $|G : N|$ páros, akkor van olyan H, amelyre $N \leq H \leq G$, és $|H : N| = 2$.

8. Legyen $g \in G$, és $o(g) = nm$, ahol $(n, m) = 1$. Bizonyítsuk be, hogy g egyértelműen felírható uv alakban, ahol $u, v \in \langle g \rangle$, $o(u) = m$, és $o(v) = n$.

Hf1. Legyenek A és B a G csoport részcsoportjai, és tegyük föl, hogy A és B kommutatívak, és $G = AB$. Bizonyítsuk be, hogy $A \cap B$ normálosztója G-nek.

Hf2. Legyen $G = \langle a \rangle \cong C_{24}$, és $N = \langle a^{40} \rangle$. Határozzuk meg az N részcsoport (normálosztó) és G/N rendjét. Adjunk meg olyan elemet g-ben, amelyre $o(\overline{g}) = 4$ a G/N faktorcsoportban, de $o(g) \neq 4$ az eredeti G csoportban!