1. Egy $r \in R$ gyűrűelem idempotens, ha $r^2 = r$. Bizonyítsuk be, hogy ha egy gyűrűnek minden eleme idempotens, akkor a gyűrű kommutatív. Hány eleme lehet egy ilyen tulajdonságú véges gyűrűnek? Adjunk meg ilyen végtelen gyűrűt is!

2. Bizonyítsuk be, hogy ha R egységelemes gyűrű, és $a \in R$ nilpotens (azaz van olyan $n > 0$ egész szám, amellyel $a^n = 0$), akkor $1 + a$ invertálható!

3. Bizonyítsuk be, hogy ha $1 \in R$, $a, b \in R$, és $1+ab$-nek van inverze, akkor $1+ba$-nak is van!

4. a) Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{H}$ tisztán képzetes elemeit $\mathbb{R}^3$ vektorainak tekintve (ahol i, j, k a standard bázis elemei), az $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ vektorok $\mathbb{H}$-beli szorzata $-\mathbf{uv} + \mathbf{u} \times \mathbf{v}$, ahol $\mathbf{uv}$ skalárszorzat, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ pedig vektoriális szorzat.

b) Határozzuk meg $\mathbb{H}$ centrumát, azaz a $Z(\mathbb{H}) = \{ z \in \mathbb{H} \mid zr = rz \ \forall r \in \mathbb{H} \}$ részalgebrát. Hány dimenziós altér a nem centrumbeli elemek centralizátora?

5. a) Legyen G véges csoport, és $R = KG$ csoportalgebra. Bizonyítsuk be, hogy $I = K(\sum_{g \in G} g)$ ideál R-ben, és $I \leq Z(R)$.

b) Lássuk be, hogy $G \cong C_3$ és $K = \mathbb{Z}_2$ esetén ennek az ideálnak van komplementer ideálja, azaz olyan $J \triangleleft R$, amelyre $I + J = R$ és $I \cap J = 0$, de $G \cong C_3$ és $K = \mathbb{Z}_3$ esetén nincs.

6. Mit mondhatunk az olyan R gyűrűről, amelyben minden $a \in R$ elemre a $\{ 0, a \}$ halmaz ideálja R-nek?

7. Adjuk meg a $K[x, y]$ gyűrű (ahol K kommutatív test) x és y^2 által generált ideáljának elemeit. Adjuk meg a faktorgyűrűt az ideál mellékosztályainak egy alkalmas reprezentánsrendszerével. Mik az ideáljai a faktorgyűrűnek?

8. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1) \cong \mathbb{C}$. Határozzuk meg a $\mathbb{C}[x]/(x^2 + 1)$ gyűrű összes ideálját!

9. Adjuk meg a $K[x]/(x^2+x+1)$ faktorgyűrű elemszámát, ha $K = \mathbb{Z}_2$, illetve $\mathbb{Z}_3$. Ezek közül melyik faktorgyűrű test?

Hf1. Bizonyítsuk be, hogy kommutatív gyűrűben a nilpotens elemek ideált alkotnak!

Hf2. Legyen K test. Bizonyítsuk be, hogy a K fölötti $n \times n$-es fölső háromszögmátrixok gyűrűjében ideált alkotnak azok, amelyeknek átlójában csupa 0 áll. Bizonyítsuk be, hogy az ehhez az ideálhoz tartozó faktorgyűrű kommutatív.