**1.** Bizonyítsuk be, hogy ha $R = 2\mathbb{Z}$, és $R_1 = \{(m, a) \mid a \in R,\ m \in \mathbb{Z}\}$ az $R$ egységelemes gyűrűvé való szokásos kiterjesztése, akkor $R$ nem izomorf $\mathbb{Z}$-vel.

**2.** Legyen $R$ véges gyűrű, és $n$ az $(R, +)$ véges Abel-csoport elemeinek maximális rendje. Definiáljuk az $R_{(1)}$ gyűrűt mint a $\mathbb{Z}_n \times R$ Descartes-szorzatot az

$$(i, r) + (j, s) = (i + j,\ r + s), \qquad (i, r)(j, s) = (ij,\ is + jr + rs)$$

műveletekkel. Bizonyítsuk be, hogy $R_{(1)}$ olyan véges, egységelemes gyűrű, amelybe $R$ ideálként beágyazható. Lássuk be, hogy ha $R$ zérógyűrű, amelyre $1 < |R| < \infty$, akkor ez a lehető legkisebb egységelemes bővítése $R$-nek (még úgy is, ha $R$-et csak részgyűrűként kell beágyazni).

**3.** Mi a páros egészek gyűrűjének, $2\mathbb{Z}$-nek a hányadosteste?

**4.** Határozzuk meg $K^{n\times n}$ jobb- és balideáljait.

**5.** Bizonyítsuk be, hogy minden véges integritási tartomány test.

**6.** Legyen $K$ test, $p(x) \in K[x]$, $n$-edfokú polinom, és $R = K[x]/I$, ahol $I = (p(x)) \triangleleft K[x]$. Jelöljük $\alpha$-val a faktorgyűrű $x + I$ elemét.

a) Bizonyítsuk be, hogy $\alpha$ gyöke a $p(x)$ polinomnak, és $R$ egyértelműen írhatók $\alpha$ legföljebb $(n-1)$-edfokú polinomjaiként.

b) Alkalmazzuk az előbbi felírást az $R = K[x]/(p(x))$ faktorgyűrűre is, ahol $K = \mathbb{Z}_2$ és $p(x) = x^3 + x + 1$. Lássuk be, hogy $R$ nyolcelemű test. Keressük meg $x^3 + x^2 + 1$ összes gyökét $R$-ben.

**Hf1.** Mik az invertálható elemek egy $R$ véges zérógyűrűnek a 2. feladat szerinti $R_{(1)}$ egységelemes bővítésében?

**Hf2.** Írjuk fel a $\mathbb{Z}_2[x]$ gyűrű négyelemű faktorgyűrűinek (azaz másodfokú polinom által generált ideál szerinti faktorgyűrűinek) a szorzástábláját. Hány egymással nem izomorf gyűrűt kapunk ilyen módon?