1. Legyen R egy legalább kételemű, nem feltétlenül egységelemes gyűrű. Bizonyítsuk be, hogy R-nek akkor és csak akkor nincs a 0-tól és R-től különböző jobbideálja, ha R ferdetest vagy prímrendű zérógyűrű.

2. Legyen α az $x^2 - x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ polinom egyik gyöke.

a) Hány dimenziós $\mathbb{Q}(\alpha)$ mint $\mathbb{Q}$ fölötti vektortér?
b) Bizonyítsuk be, hogy α^7 és α lineárisan összefüggnek ebben a vektortérben.

3. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{Q}[x]/(x^2 - 2) \cong \mathbb{Q}[x]/(x^2 - 2x - 1)$.

4. Adjuk meg $\cos 20^\circ$ minimálpolinomját $\mathbb{Q}$ fölött.

5. Adjuk meg $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ minimálpolinomját $\mathbb{Q}$, illetve $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$ fölött!

6. Bizonyítsuk be, hogy ha $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$-re $\alpha+\beta$ és $\alpha\beta$ algebrai $\mathbb{Q}$ fölött, akkor α és β is algebraiak.

7. Adjunk példát nem véges fokú algebrai bővítésre!

8. Legyen α az $x^3 - 2x^2 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ polinom egyik gyöke. Adjuk meg $\alpha^2 + 2$ reciprokát α legföljebb másodfokú polinomjaként!

9. Hányadfokú a $\mathbb{Q}(i\sqrt{3})$, illetve az $\mathbb{Q}(i + \sqrt{3})$ bővítés $\mathbb{Q}$ fölött?

10. Számítsuk ki a következő testbővítések fokait $\mathbb{Q}$ fölött!

a) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ b) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ c) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})$ d) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2} + \sqrt{2})$

11. Legyen α az $x^3 + x + 1$ polinom egyik gyöke $\mathbb{Z}_2$ fölött, és legyen $K = \mathbb{Z}_2(\alpha)$. Irreducibilis-e az $x^2 + x + \alpha$ polinom K fölött?

Hf1. Határozzuk meg a $\mathbb{Q}(\sqrt{4 - \sqrt{2}})$ minimálpolinomját $\mathbb{Q}$ fölött!

Hf2. Legyen $K = \mathbb{Z}_2(\alpha)$ a kételemű testnek az $x^4 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ polinom α gyökével való bővítése. Írjuk fel az $\frac{\alpha^2}{\alpha+1}$ elemet α legföljebb harmadfokú polinomjaként!