1. Legyen M jobb R-modulus, B balideálja, J jobbideálja R-nek, $a \in M$ és U, V részmodulusok M-ben. Az alábbiak közül melyikek lesznek feltétlenül részmodulusai M-nek? (Az összegek komplexusösszegeket, a szorzatok a komplexusszorzat elemeiből alkotott összegek hamazát jelentik.)

a) aR	b) aB	c) aJ	d) $U \cap V$	e) $U \cup V$
f) $U + V$	g) $\mathrm{Ann}_M(B)$	h) $\mathrm{Ann}_M(J)$	i) UB	j) UJ.

2. Bizonyítsuk be, hogy egy R gyűrű minden nilpotens jobbideálja annullál minden egyszerű jobb R-modulust.

3. Mi lehet a $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_3$, illetve $\mathbb{Z}_6$ gyűrűk fölötti modulusok additív csoportja?

4. Legyen $A \leq (\mathbb{Q}, +)$ a p-hatvány nevezőjű törtek részcsoportja, és $\mathbb{Z}_{p^\infty} = A/\mathbb{Z}$ mint $\mathbb{Z}$-modulus. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ minden valódi részmodulusa ciklikus, de $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ nem áll elő ciklikus modulusok direkt összegeként!

5. Modulusok direkt szorzata a teljes Descartes-szorzatuk a komponensenkénti műveletekkel. Igaz-e, hogy féligegyszerű modulusok direkt szorzata is féligegyszerű?

6. Melyek egyszerűek, melyek féligegyszerűek a véges Abel-csoportok közül? Milyen n-re féligegyszerű a $\mathbb{Z}_n$ Abel-csoport?

7. Tegyük fel, hogy R féligegyszerű, egységelemes gyűrű. Bizonyítsuk be a Wedderburn–Artin-tétel nélkül, hogy ekkor R_R véges sok egyszerű modulus direkt összege!

8. Bizonyítsuk be, hogy a következő két állítás ekvivalens tetszőleges $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrixra:
(i) $\mathbb{C}^n$ minden A-invariáns alterének van A-invariáns direkt kiegészítője;
(ii) A diagonalizálható.

9. Tegyük fel, hogy az R véges gyűrű minden x elemére van olyan $n > 1$, hogy $x^n = x$. Bizonyítsuk be, hogy R kommutatív! (Útmutatás: Használjuk a Wedderburn–Artin-tételt!)

10. Adjuk meg az összes nemkommutatív 4-elemű gyűrűt izomorfia erejéig! (Mutassuk meg először, hogy az additív csoportja nem lehet ciklikus, és hogy a gyűrűnek van nem nulla nilpotens ideálja.)

11. Láttuk, hogy testek multiplikatív csoportjának minden véges részcsoportja ciklikus. Adjunk új bizonyítást erre a tételre a véges Abel-csoportok alaptételének a segítségével!

Hf1. Legyen
$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{és} \quad R = \left\{ \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$
Bizonyítsuk be, hogy M jobbmodulus R fölött (a természetes mátrixszorzással), és hogy M-nek egyetlen valódi részmodulusa van.

Hf2. Bizonyítsuk be, hogy ha S, T, U részmodulusai az M modulusnak, akkor
$$S \cap (T + U) = (S \cap T) + U \Leftrightarrow S \supseteq U$$