

1. Legyen g egy csoportelem, g rendje $o(g) = n$, és $k, m \in \mathbb{Z}$. Lássuk be, hogy

a) $g^m = 1 \Leftrightarrow n \mid m$;

b) $o(g^k) = \frac{n}{(n, k)}$.

Fogalmazzuk meg és bizonyítsuk be a megfelelő állításokat végtelen rendre!

Megoldás: a) \Rightarrow : Osszuk el az m -et maradékosan n -nel: $m = nq + r$. Ekkor $1 = g^m = (g^n)^q g^r = 1^q g^r = g^r$, de $r < n$, tehát $r = 0$, így $n \mid m$.

\Leftarrow : $m = nq \Rightarrow g^m = (g^n)^q = 1^q = 1$.

b) Az a) rész miatt $(g^k)^m = g^{km} = 1 \Leftrightarrow n \mid km \Leftrightarrow \frac{n}{(n, k)} \mid \frac{k}{(n, k)} m \Leftrightarrow \frac{n}{(n, k)} \mid m$, mivel $\frac{n}{(n, k)}$ és $\frac{k}{(n, k)}$ relatív prímek. Így a g^k legkisebb 1 értékű pozitív hatványa az $\frac{n}{(n, k)}$ -adik.

Végtelen rendre a megfelelő állítások: Ha $o(g) = \infty$, akkor

$g^m = 1 \Leftrightarrow m = 0$;

$o(g^k) = \infty$, ha $k \neq 0$.

Az első nyilvánvaló a végtelen rend definíciójából, a második pedig az elsőből következik: ha $(g^k)^m = g^{km} = 1$, akkor $km = 0$, így $m = 0$.

2. Legyenek A és B a G csoport részcsoportjai. Lássuk be, hogy az $AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$ komplexusszorzat akkor és csak akkor részcsoport, ha $AB = BA$.

Megoldás: Tudjuk, hogy egy nem üres $H \subseteq G$ részhalmaz akkor és csak akkor részcsoport, ha $HH = H$ és $H^{-1} = H$. A bizonyításban felhasználjuk azt is, hogy tetszőleges $A, B \subseteq G$ részhalmazra $(AB)^{-1} = \{(ab)^{-1} \mid a \in A, b \in B\} = \{b^{-1}a^{-1} \mid a \in A, b \in B\} = B^{-1}A^{-1}$.

Tegyük fel, hogy $A, B, AB \leq G$. Ekkor $BA = B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1} = AB$.

Most tegyük fel, hogy az A, B részcsoportokra $AB = BA$. Ekkor $ABAB = AABB = AB$, és $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = BA = AB$. Tehát $AB \leq G$.

3. Legyen A és B a G véges csoport két részcsoportja. Bizonyítsuk be, hogy $|AB| = \frac{|A| \cdot |B|}{|A \cap B|}$.

Megoldás: Az $\{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ Descartes-szorzatnak $|A| \cdot |B|$ eleme van. Ha aszerint osztályozzuk a Descartes-szorzat elemeit, hogy az ab szorzat mivel egyenlő, akkor (a, b) és (a', b') pontosan akkor vannak egy osztályban, ha $ab = a'b'$, azaz $(a')^{-1}a = b'b^{-1}$. Mivel ez utóbbi elem A -ban és B -ben is benne van, ha ezt az elemet x -nek hívjuk, akkor $x \in A \cap B$, és $a' = ax^{-1}$, míg $b' = xb$, vagyis $(a', b') = (ax^{-1}, xb)$. Tehát pontosan annyi elem van egy osztályban, mint ahány eleme van $A \cap B$ -nek. Az ab szorzat pedig $|AB|$ -féle értéket vehet föl, így $|A| \cdot |B| = |A \cap B| \cdot |AB|$, amiből következik a feladat állítása.

4. Bizonyítsuk be, hogy egy részcsoportnak ugyanannyi jobb oldali mellékosztálya van, mint bal oldali mellékosztálya. Adjunk meg köztük egy természetes bijekciót!

Megoldás: Tetszőleges Hg jobb mellékosztályra $(Hg)^{-1} = g^{-1}H^{-1} = g^{-1}H$ az inverz elemhez tartozó bal mellékosztály. Mivel a komplexusokra igaz, hogy $(A^{-1})^{-1} = A$, ez bijekciót ad a jobb és bal mellékosztályok között.

5. Milyen rendű elemek vannak a D_n diédercsoportban, és melyikből hány darab?

Megoldás: Az n darab tükrözés mindegyike másodrendű, a forgatások pedig egy n -edrendű ciklikus csoportot alkotnak, tehát ezek között minden $d \mid n$ pozitív egészre pontosan $\varphi(d)$ darab d -edrendű van.

6. Bizonyítsuk be, hogy bármely végtelen csoportnak végtelen sok részcsoportha van.

Megoldás: Tegyük fel, hogy a csoportnak van egy végtelen rendű g eleme. Ekkor $\langle g^k \rangle \neq \langle g^m \rangle$, amennyiben $k \neq m$ pozitív számok, mert különben $g^k \in \langle g^m \rangle$ miatt $g^k = g^{mx}$, azaz $g^{k-mx} = 1$ valamely $x \in \mathbb{Z}$ -re, így $k - mx = 0$ lenne, azaz $m \mid k$, és ugyanígy $k \mid m$, tehát $k = m$ lenne. Tehát ilyenkor már $\langle g \rangle$ -nek is van végtelen sok részcsoportha.

Ha csak véges rendű elemek vannak, akkor tudjuk, hogy csak véges sokan generálhatják ugyanazt a (ciklikus) részcsoporthat, tehát végtelen sok ciklikus részcsoporthat kell lennie.

7. Bizonyítsuk be, hogy C_∞ minden nem triviális részcsoportha véges indexű, azaz véges sok mellékosztálya van.

Megoldás: Tudjuk, hogy C_∞ -nek minden részcsoportha ciklikus, tehát ha a nagy csoportnak generátoreleme a , akkor a részcsoportha a^n valamely $n > 0$ -ra ($\langle a^0 \rangle = 1$ a triviális részcsoportha, és $\langle a^{-n} \rangle = \langle a^n \rangle$). Ekkor $H = \langle a^n \rangle$ minden mellékosztályának van a^r alakú reprezentánsa, ahol $0 \leq r < n$, ugyanis tetszőleges egész m -re az n -nel való $m = nq + r$ maradékos osztásból $a^m = (a^n)^q a^r \in Ha^r$, tehát a^m mellékosztályában a^r is benne van. Tehát a mellékosztályok száma legfeljebb n . Az is igaz, hogy a mellékosztályok száma pontosan n , mert $0 \leq i, j < n$, $i \neq j$ esetén $a^{i-j} \notin \langle a^n \rangle$, vagyis $1, a, \dots, a^{n-1}$ nem lehetnek egy mellékosztályban.

8. Hány különböző homomorfizmus adható meg az alábbi csoportok között?

$$a) C_{10} \rightarrow C_{33} \quad b) C_n \rightarrow C_n \quad c) C_n \rightarrow C_m \quad d) C_\infty \rightarrow C_n \quad e) C_n \rightarrow C_\infty$$

Megoldás: a) Legyen $C_{10} = \langle a \rangle$ és $C_{33} = \langle b \rangle$. Ha $\varphi : \langle a \rangle \rightarrow \langle b \rangle$ homomorfizmus, akkor $o(\varphi(a)) \mid o(a) = 10$, és $o(\varphi(a)) \mid |\langle b \rangle| = 33$, ezért $o(\varphi(a)) \mid (10, 33) = 1$. Tehát $\varphi(a) = 1 \Rightarrow \varphi(a^k) = 1^k = 1$ minden k -ra, vagyis csak a triviális $\equiv 1$ homomorfizmus létezik.

b) Ez a c) kérdés speciális esete: n különböző homomorfizmus van C_n -ből C_n -be, a generátorelemet C_n bármely elemébe lehet képezni.

c) Legyen $C_n = \langle a \rangle$ és $C_m = \langle b \rangle$. Az a generátorelem képe csak olyan $c \in \langle b \rangle$ lehet, amelynek a rendje osztja a rendjét. Ha viszont teljesül ez a feltétel, akkor a $\varphi : a^k \mapsto c^k$ ($k \in \mathbb{Z}$) leképezés jól definiált: $a^k = a^\ell \Rightarrow a^{k-\ell} = 1 \Rightarrow o(c) \mid n \mid k - \ell \Rightarrow c^{k-\ell} = 1 \Rightarrow c^k = c^\ell$, és művelettartó is: $\varphi(a^k a^\ell) = \varphi(a^{k+\ell}) = c^{k+\ell} = c^k c^\ell = \varphi(a^k) \varphi(a^\ell)$. Mivel C_m minden elemének a rendje osztója m -nek, csak azok jönnek szóba, amelyeknek a rendje (m, n) -nek osztója, ilyenből pedig C_m -ben pontosan (m, n) darab van, a C_m egyetlen (m, n) elemű részcsoporthájában. Tehát a $C_n \rightarrow C_m$ homomorfizmusok száma (m, n) .

d) Ha $C_\infty = \langle a \rangle$ és $C_n = \langle b \rangle$, akkor az a elemet C_n tetszőleges c elemébe képezhetjük az $a^k \mapsto c^k$ ($k \in \mathbb{Z}$) leképezéssel. Ez C_∞ -n jól definiált, és nyilván művelettartó is. Tehát n különböző homomorfizmus van C_∞ -ből C_n -be.

e) Mivel véges rendű elem csak véges rendűbe mehet, C_∞ -ben pedig csak az 1 véges rendű, C_n -ből C_∞ -be csak a triviális $\equiv 1$ homomorfizmus létezik.

Hf1. Bizonyítsuk be, hogy $o(ab) = o(ba)$ egy G csoport tetszőleges a, b elemeire.

Hf2. Bizonyítsuk be, az \mathbb{F}_2 fölötti invertálható 3×3 -as felső háromszögmátrixok csoportja nem ciklikus.