1. *Legyen G csoport, és $H \leq G$. Döntsük el, melyek igazak az alábbi állítások közül.*

a) Mindig van olyan homomorfizmus G-ből, amelynek a magja H.
b) Ha $H \triangleleft G$, akkor van olyan homomorfizmus G-ből, amelynek a magja H.
c) Mindig van olyan homomorfizmus G-be, melynek a képe H.
d) Tetszőleges $\varphi : G \to K$ homomorfizmusnál $\varphi(H) \leq K$.
e) Ha $H \triangleleft G$, és $\varphi : G \to K$ homomorfizmus, akkor $\varphi(H) \triangleleft K$.
f) Ha $H \triangleleft G$, és $\varphi : G \to K$ homomorfizmus, akkor $\varphi(H) \triangleleft \varphi(G)$.
g) Tetszőleges $\varphi : G \to K$ homomorfizmusra $n \mid |G|$ esetén $n \mid |\varphi(G)|$.
h) Tetszőleges $\varphi : G \to K$ homomorfizmusra $|G| < \infty$ és $n \mid |\varphi(G)|$ és esetén $n \mid |G|$.

Megoldás: a) Nem igaz, mert a magnak normálosztónak kell lennie.
b) Igen, a $\varphi : G \to G/H$, $\varphi(g) = Hg$ ilyen homomorfizmus.
c) Igen, a $\varphi : H \to G$, $\varphi(h) = h$ ilyen homomorfizmus.
d) Igen, mert $1 = \varphi(1) \in \varphi(H)$, és $h, h' \in H$-ra $\varphi(h)\varphi(h')^{-1} = \varphi(h(h')^{-1}) \in \varphi(H)$.
e) Nem igaz, például ha $S \leq K$ nem normálosztó, akkor a $\varphi : S \to K$, $\varphi(s) = s$ homomorfizmusra $S \triangleleft S$, de $\varphi(S) = S$ nem normálosztó K-ban.
f) Igen. Láttuk d)-ben, hogy részcsoport, és tetszőleges $\varphi(g) \in \varphi(G)$-re, $\varphi(h) \in \varphi(H)$-ra (ahol $h \in H$) $\varphi(g)^{-1}\varphi(h)\varphi(g) = \varphi(g^{-1}hg) \in \varphi(H)$, mert $g^{-1}hg \in H$.
g) Nem igaz, lehet például $n = |G| \neq 1$, és a homomorfizmus az azonosan 1 leképezés.
h) Igaz, ugyanis $\varphi(G) = \operatorname{Im}\varphi \cong G/\operatorname{Ker}\varphi$, és így $|\varphi(G)| = \frac{|G|}{|\operatorname{Ker}\varphi|} \mid |G|$.

2. *Legyen $|G| = 91$. Hány olyan $G \to G$ homomorfizmus van, ami G-nek legalább két, különböző rendű, az egységtől különböző elemét 1-be viszi?*

Megoldás: G elemeinek rendje csak 91 osztója lehet, tehát $1, 7, 13$ vagy 91. Ha van olyan 91-edrendű elem, amit a homomorfizmus 1-be visz, akkor minden elem az 1-be képződik, ugyanis a 91-edrendű elem szükségképpen generálja a teljes csoportot.
Most tegyük fel, hogy nincs ilyen 91-edrendű elem. Akkor a feladatban szereplő két magbeli elem egyike 7-edrendű, a másik 13-adrendű. De akkor a mag rendje osztható 7-tel és 13-mal, így 91-gyel is, és akkor a mag a teljes csoport, vagyis a homomorfizmus így is csak az azonosan 1 leképezés lehet.

3. *Bizonyítsuk be, hogy ha $N \triangleleft G$, és $H \leq G$ úgy, hogy $H \cap N = \{1\}$ és $HN = G$, akkor $G/N \cong H$.*

Megoldás: A $H \cap N = 1$ feltételből következik, hogy H az N minden mellékosztályát legföljebb 1 elemben metszi, ugyanis ha h_1 és h_2 ugyanabban a mellékosztályban vannak, akkor $h_1h_2^{-1} \in N$, de $h_1h_2^{-1} \in H$ is igaz, így $h_1h_2^{-1} \in H \cap N = 1$, vagyis $h_1 = h_2$. A $HN = G$ (vagy ekvivalensen $NH = G$) feltételből adódik, hogy minden mellékosztályban van H-nak eleme: $g \in G$ felírható $g = nh$ alakban, így $Ng = Nh$ tartalmazza a h-t. Emiatt a $H \to G/N$, $n \mapsto Nh$ leképezés bijektív, és nyilván műveletartó is.

4. *Határozzuk meg a D_4 diédercsoport részcsoportjait, normálsztóit, és faktorcsoportjait!*

Megoldás: $|D_4| = 8 \Rightarrow H \leq D_4$-re $|H| = 1$, 2, 4 vagy 8.
Ha $|H| = 1$, akkor $H = \{1\}$.
Ha $|H| = 2$, akkor $H = \{1, g\}$, ahol $o(g) = 2$, tehát ilyenből öt van: $g = f^2, t, tf, tf^2$ és tf^3-re.
Ha $|H| = 4$, akkor vagy van benne negyedrendű elem, és akkor $H \cong C_4$: ez csak $\langle f \rangle$

lehet, vagy minden $\neq 1$ eleme másodrendű, ezért legalább két tükrözés benne van a t, tf, tf^2, tf^3 közül. Ez a két tükrözés nem lehet (ciklikusan) "szomszédos", mert akkor $(tf^k)^{-1}(tf^{k+1}) = f \in H$ lenne, tehát csak az $\{1, t, tf^2, f^2\}$ és $\{1, tf, tf^3, f^2\}$ maradnak, és ezek valóban részcsoportok (két különböző másodrendű elemük szorzata mindig a harmadik másodrendűt adja).
Végül maga D_4 az egyetlen 8-adrendű részcsoport.
Ezek közül a triviális 1- és 8-elemű nyilván normálosztó, és a négyeleműek is, mert azok 2 indexűek. A másodrendűekből csak $\langle f^2\rangle$ normálosztó ($t^{-1}f^2t = f^{-2} = f^2$ és $f^{-1}f^2f = f^2$ miatt zárt a konjugálásra), viszont a többi nem, ugyanis $f^{-1}tf^kf = tt^{-1}f^{-1}tf^{k+1} = tff^{k+1} = tf^{k+2} \notin \{1, tf^k\}$.
Az nyilvánvaló, hogy $D_4/D_4 \cong 1$, $D_4/1 \cong D_4$, és ha $|N| = 4$, akkor D_4/N 2-elemű, így csak C_2-vel izomorf lehet. Végül $N = \langle f^2\rangle$-re G/N minden $\neq 1$ eleme másodrendű, mert D_4 2-nél nagyobb rendű elemeinek, f-nek és f^{-1}-nek a négyzete már N-be esik. Így ebben a négyelemű csoportban bármely két különböző másodrendű elem szorzata csak a harmadik lehet (bármelyik sorrendben), tehát D_4/N izomorf a Klein-csoporttal ($\cong C_2 \times C_2$).

5. *Legyen $H \leq G$ és $M, N \lhd G$. Bizonyítsuk be, hogy*
a) $H \cap N \lhd H$; $N \cap M \lhd G$;
b) $HN \leq G$; $NM \lhd G$;
c) $M \leq N$ esetén G/N homomorf képe G/M-nek.

Megoldás: a) Részcsoportok metszete részcsoport, tehát csak a konjugáltságra való zártságot kell belátni.
$x \in H \cap N$, $h \in H \Rightarrow h^{-1}xh \in H$, mert $h, x \in H$ és $h^{-1}xh \in N$, mert $x \in N \lhd G$, így $h^{-1}xh \in H \cap N$.
$x \in N \cap M$, $g \in G$-re $g^{-1}xg \in N$ és $\in M$, mert N és M is normálosztó, így $g^{-1}xg \in N \cap M$.
b) $N \lhd G \Rightarrow HN = NH \Rightarrow HN \leq G$.
Az előzőből következik, hogy $NM \leq G$. Továbbá NM zárt a G elemeivel való konjugálásra, ugyanis $g \in G$, $n \in N$, $m \in M$-re $g^{-1}nmg = (g^{-1}ng)(g^{-1}mg) \in NM$.
c) A 2. izomorfizmus-tétel szerint $(G/M)/(N/M) \cong G/N$, tehát G/N faktorcsoportja, és így homomorf képe is G/M-nek.

6. *Legyen $N \lhd G$. Bizonyítsuk be, hogy a $H \mapsto H/N := \{Nh \mid h \in H\}$ megfeleltetés bijekció a G csoport N-et tartalmazó részcsoportjai és a G/N faktorcsoport részcsoportjai között. Lássuk be azt is, hogy az előbb megadott bijekciónál a normálosztók egymásnak felelnek meg, és hogy ez a bijekció a részcsoportok közötti tartalmazási relációt is megőrzi.*

Megoldás: Jelölje $S(G)$ és $S(G/N)$ a G, illetve G/N részcsoportjainak halmazát, és $S(G)_{\geq N}$ a G N-et tartalmazó részcsoportjainak halmazát. Legyen

$$\Phi : S(G) \to S(G/N), \quad \Phi(H) = \{Nh \mid h \in H\}$$

($\Phi(H)$ valóban részcsoport, mert $N1 = N$ az egységelem, $Nh_1Nh_2 = Nh_1h_2$, és $(Nh)^{-1} = Nh^{-1}$). És fordítva,

$$\Psi : S(G/N) \to S(G), \quad \Psi(\{Ng_i \mid i \in I\}) = \bigcup_{i \in I} Ng_i$$

(ez is részcsoportot ad, mert $1 \in N$, és ha $a \in Ng_i$ és $b \in Ng_j$, akkor $ab \in Ng_iNg_j$ és $a^{-1} \in (Ng_i)^{-1}$, ahol $\bar{1} = N$, Ng_iNg_j és $(Ng_i)^{-1}$ is benne vannak a G/N megadott részcsoportjában).
Vegyük észre, hogy Ψ képeként csak N-et tartalmazó részcsoportokat kapunk, mert $\bar{1} = N$ benne van G/N minden részcsoportjában.
Belátjuk, hogy a Φ megszorítása $S(G)_{\geq N}$-re (nevezzük ezt Φ_1-nek) és Ψ egymás inverzei.
Ha $N \leq H \leq G$, akkor $\Psi(\Phi(H)) = \bigcup \{\, Nh \mid h \in H \,\} \subseteq H$, és H minden eleme benne van az unióban, minthogy $h = 1h \in Nh$, így $\Psi(\Phi(H)) = H$.
Fordítva, ha $\mathcal{H} = \{\, Ng_i \mid i \in I \,\} \in S(G/N)$, akkor $\Phi(\Psi(\mathcal{H})) = \{\, Nx \mid x \in Ng_i \text{ valamely } i \in I\text{-re} \,\}$. De az ilyen x-ekre $Nx = Ng_i$, így $\Phi(\Psi(\mathcal{H})) = \mathcal{H}$.
Ezzel bebizonyítottuk, hogy Φ_1 (és ugyanígy Ψ) bijekció $S(G)_{\geq N}$ és $S(G/N)$ között. Nyilvánvaló, hogy Φ_1 (illetve Φ) és Ψ is megőrzi a tartalmazást, azaz ha $H_1 \leq H_2$, akkor $\Phi(H_1) \leq \Phi(H_2)$, és ha $\mathcal{H}_1 \leq \mathcal{H}_2$, akkor $\Psi(\mathcal{H}_1) \leq \Psi(\mathcal{H}_2)$.
Ha $H \lhd G$, akkor $\Phi(H)$ is zárt a konjugálásra nézve: $(Ng)^{-1}(Nh)(Ng) = Ng^{-1}hg \in \Phi(H)$, mert $g^{-1}hg \in H$ minden $g \in G$-re. Fordítva, ha $\mathcal{H} \lhd G/N$, akkor minden $g \in G$-re és $a \in Ng_i \in \mathcal{H}$-ra $g^{-1}ag \in (Ng)^{-1}Ng_iNg \in \mathcal{H}$.

7. *Bizonyítsuk be, hogy ha $N \lhd G$, és $|G : N|$ páros, akkor van olyan H, amelyre $N \leq H \leq G$, és $|H : N| = 2$.*

Megoldás: $|G/N|$ páros, ezért van benne másodrendű elem (ld. az 1. feladatsor 8. feladatát vagy az előadáson később szereplő Cauchy-tételt), ez pedig egy $\mathcal{H}$ másodrendű részcsoportot generál. Az előző feladat szerinti Ψ leképezés a $\mathcal{H}$-hoz olyan H részcsoportot rendel, amely N két mellékosztályának az uniója ($N \cup Nt$ valamely $t \in G$-re), tehát $N \leq H$, és $|H : N| = 2$.

8. *Legyen $g \in G$, és $o(g) = nm$, ahol $(n, m) = 1$. Bizonyítsuk be, hogy g egyértelműen felírható uv alakban, ahol $u, v \in \langle g \rangle$, $o(u) = m$, és $o(v) = n$.*

Megoldás: Mivel $(n, m) = 1$, van olyan $x, y \in \mathbb{Z}$, hogy $nx + my = 1$, így $g = g^{nx+my} = g^{nx} \cdot g^{my}$. Legyen $u = g^{nx}$ és $v = g^{my}$. Az $nx + my = 1$ egyenletből következik, hogy $(x, m) = 1$ (mert (x, m) osztója a bal oldalon mindkét tagnak) és hasonlóan $(y, n) = 1$, így $o(u) = nm/(nx, nm) = m/(x, m) = m$ és $o(v) = nm/(my, nm) = n/(y, n) = n$.
A felbontás egyértelmű, mert ha $g = uv = u'v'$ két ilyen felbontás, akkor $u, v, u', v' \in \langle g \rangle$ miatt u, v, u', v' páronként felcserélhetők, ezért a $w = (u')^{-1}u = v'v^{-1}$ elemre $w^m = (u')^{-m}u^m = 1$ és $w^n = (v')^n v^{-n} = 1 \Rightarrow o(w) \mid (m, n) = 1 \Rightarrow w = 1 \Rightarrow u = u'$ és $v = v'$.

Hf1. *Legyenek A és B a G csoport részcsoportjai, és tegyük föl, hogy A és B kommutatívak, és $G = AB$. Bizonyítsuk be, hogy $A \cap B$ normálosztója G-nek.*

Hf2. *Legyen $G = \langle a \rangle \cong C_{24}$, és $N = \langle a^{40} \rangle$. Határozzuk meg az N részcsoport (normálosztó) és G/N rendjét. Adjunk meg olyan $g \in G$ elemet, amelyre $o(\overline{g}) = 4$ a G/N faktorcsoportban, de $o(g) \neq 4$ az eredeti G csoportban!*