1. *Határozzuk meg a következő normálosztókkal vett faktorcsoportokat!*

a) $G = GL(n, K)$, $N = SL(n, K)$;
b) $G = D_4$, $N = \langle f^2 \rangle$;
c) $G = (\mathbb{R}, +)$, $N = \mathbb{Z}$;
d) $G = Q^\times$, $N = \{\pm 1\}$;
e) $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, *ahol* $o(a) = 4$ *és* $o(b) = 6$, $N = \langle a^2 b^3 \rangle$.

Megoldás: a) $SL(n, K)$ a $\det : GL(n, K) \to K^\times$ homomorfizmus magja, s mivel ez a homomorfizmus szürjektív, a homomorfizmustétel szerint $GL(n, K)/SL(n, K) = GL(n, K)/\operatorname{Ker}\det \cong \operatorname{Im}\det = K^\times$.

Másképp: Teljes reprezentánsrendszert alkotnak azok diagonális a mátrixok, amelyeknek bal felső sarkában tetszőleges $c \neq 0$ elem áll, és a többi diagonális elem 1. Ez részcsoport is, és izomorf $K^\times$-val, tehát a faktorcsoport is $K^\times$-val izomorf.

b) $|G/N| = 8/2 = 4$, és G/N-ben minden elem 2 vagy 1 rendű, mert a G-ben is csak f és az inverze nagyobb rendű ennél, de azoknak a négyzete már N-ben van. Ráadásul $\bar{f}$ és $\bar{t}$ különbözők, és felcserélhetők egymással a faktorcsoportban: $tf^{-1} \notin N$ és $\bar{t}^{-1}\bar{f}\bar{t} = \bar{f}^{-1} = \bar{f}$, ezért G/N Abel-csoport, és $G/N = \langle \bar{f} \rangle \times \langle \bar{t} \rangle \cong C_2 \times C_2$.

c) A $[0, 1)$ intervallum elemei teljes reprezentánsrendszert adnak (minden $x \in \mathbb{R}$ osztályában benne van az $\{x\} = x - [x]$, de két különböző, $[0, 1)$-beli szám különbsége nem egész), tehát a faktorcsoport a $[0, 1)$-gyel izomorf, amelyen a műveletet a mellékosztályok összeadásának megfelelően az $a \dot{+} b := \{a + b\}$ képlettel definiáljuk.

d) A pozitív racionális számok teljes reprezentánsrendszert adnak, s mivel ezek csoportot is alkotnak a szorzásra nézve, ezzel a csoporttal lesz izomorf a faktorcsoport.

e) $|N| = 2 \Rightarrow |G/N| = 24/2 = 12$. Vegyük észre, hogy a faktorcsoportban van 12-edrendű elem, például ab képe ilyen. Nyilván $(ab)^{12} = a^{12}b^{12} = 1$, így $\overline{ab}^{12} = \overline{1}$ is igaz. Viszont $(ab)^4 = a^4b^4 = b^4 \notin N$ és $(ab)^6 = a^6b^6 = a^2 \notin N$, ezért $o(\overline{ab})$ nem lehet $1, 2, 3, 4, 6$. Tehát $o(\overline{ab}) = 12$, és így $G/N \cong C_{12}$.

2. *Legyen* $N \lhd G$, $H \leq G$, $|G| = 24$, $|N| = 4$, *és* $|H| = 6$. *Hány elemű lehet* H *képe a* $G \to G/N$ *homomorfizmusnál? Adjunk is példát mindegyik esetre!*

Megoldás: H képe $NH/N \cong H/(N \cap H)$, így az elemszáma $|H|/|N \cap H|$. Mivel $|N \cap H|$ osztója $|N| = 4$-nek és $|H| = 6$-nak is, osztója $(4, 6) = 2$-nek, vagyis $|N \cap H| = 1$ vagy 2, így H képe 6 vagy 3 elemű. Mind a két eset előfordulhat akár Abel-csoportban is: $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle \cong C_4 \times C_6$-ban $N = \langle a \rangle$ és $H = \langle b \rangle$ esetén H képe $NH/N = G/N \cong H$ 6 elemű, de $G = \langle a \rangle \cong C_{24}$-ben $N = \langle a^6 \rangle$ és $H = \langle a^4 \rangle$ választással $N \cap H = \langle a^{12} \rangle \cong C_2$, így H képe $NH/N \cong H/(N \cap H)$ csak 3 elemű.

3. *Legyen* $g \in G$, *és* $o(g) = nm$, *ahol* $(n, m) = 1$. *Bizonyítsuk be, hogy* g *egyértelműen felírható* uv *alakban, ahol* $u, v \in \langle g \rangle$, $o(u) = m$, *és* $o(v) = n$.

Megoldás: Mivel $(n, m) = 1$, van olyan $x, y \in \mathbb{Z}$, hogy $nx + my = 1$, így $g = g^{nx+my} = g^{nx} \cdot g^{my}$. Legyen $u = g^{nx}$ és $v = g^{my}$. Az $nx + my = 1$ egyenletből következik, hogy $(x, m) = 1$ (mert (x, m) osztója a bal oldalon mindkét tagnak) és hasonlóan $(y, n) = 1$, így $o(u) = nm/(nx, nm) = m/(x, m) = m$ és $o(v) = nm/(my, nm) = n/(y, n) = n$.
A felbontás egyértelmű, mert ha $g = uv = u'v'$ két ilyen felbontás, akkor $u, v, u', v' \in \langle g \rangle$ miatt u, v, u', v' páronként felcserélhetők, ezért a $w = (u')^{-1}u = v'v^{-1}$ elemre $w^m = (u')^{-m}u^m = 1$ és $w^n = (v')^n v^{-n} = 1 \Rightarrow o(w) \mid (m, n) = 1 \Rightarrow w = 1 \Rightarrow u = u'$ és $v = v'$.

4. *Bizonyítsuk be, hogy ha $(n,m)=1$, akkor $C_{nm} \cong C_n \times C_m$.*

Megoldás: Legyen $G \cong C_n \times C_m$, azaz $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, ahol $o(a) = n$ és $o(b) = m$. Ekkor $|G| = nm$, és $o(ab) = [o(a), o(b)] = [n, m] = nm$, tehát ab generátoreleme G-nek, és így $G \cong C_{nm}$.
(Ha C_{nm} van megadva egy g generátorelemmel, akkor az előző feladatbeli felbontással lehet megkapni a $\langle v \rangle \times \langle u \rangle \cong C_n \times C_m$ direkt szorzatra bontást: a két csoport nyilván diszjunkt, mert relatív prím rendűek, normálosztók, mert egy Abel-csoport részei, és $g = uv$ miatt kigenerálják a teljes csoportot.)

5. *Melyek azok a ciklikus csoportok, amelyeket fel lehet bontani nem triviális módon direkt szorzatra?*

Megoldás: Az előző feladatban láttuk, hogy ha n nem prímhatvány, akkor C_n-nek van valódi direkt szorzatra bontása. Viszont p prímre C_{p^k}-nak nincs, mert ha $G \times H$ alakú lenne, ahol $G, H \neq 1$ részcsoportok (és szükségképpen p-hatványrendű ciklikus csoportok), akkor mindkét komponensben lenne egy p-edrendű részcsoport, tehát G-ben lenne kettő is, holott ciklikus csoportban adott rendű részcsoportból legföljebb egy van.
A végtelen rendű ciklikus csoportot sem lehet direkt szorzatra bontani, ugyanis ha $C_\infty \cong \langle a \rangle = G \times H$, ahol $G, H \neq 1$, akkor $G = \langle a^n \rangle$ és $H = \langle a^m \rangle$ valamely $m, n > 0$-ra, de akkor $1 \neq a^{mn} \in G \cap H$, ami ellentmond a direkt szorzat definíciójának.

6. *Hány negyedrendű eleme van A_8-nak?*

Megoldás: A negyedrendű ciklusfelbontásában kell lennie legalább egy 4-ciklusnak, és a 4-ciklusokon kívül csak 2-ciklusok és fixpontok lehetnek benne. Mivel a permutáció az alternáló csoportban van, páros hosszúságú ciklusból páros sokat kell tartalmaznia, tehát vagy két 4-ciklus van benne (ilyenből A_8-ban $\binom{8}{4}(3!)^2 \cdot \frac{1}{2} = 1260$ van), vagy egy 4-ciklus és egy 2-ciklus (ebből $\binom{8}{4} 3! \binom{4}{2} = 2520$ van), tehát A_8 összesen 3780 negyedrendű elemet tartalmaz.

7. *Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges olyan páratlan k számra, melyre $3 \leq k \leq n$, az A_n csoportot generálja az összes k-ciklus.*

Megoldás: Páratlan k-ra a k-ciklusok páros permutációk, tehát valóban A_n-ben vannak. Az $x = (1, 2, \ldots, k)$ és $y = (1, 2, k, k-1, \ldots, 4, 3)$ ciklusok szorzata $xy = (1, k, 2)$ egy 3-ciklus, és tetszőleges másik 3-ciklus megkapható $(xy)^g = x^g y^g$ alakban alkalmas $g \in S_n$ permutációval, tehát azok is előállnak két k-ciklus szorzataként. Így a k-ciklusok kigenerálják az összes 3-ciklust, azok meg az egész A_n-t.

8. *Bizonyítsuk be, hogy A_4-nek nincs hatodrendű részcsoportja.*

Megoldás: Az A_4 elemei 1, három darab másodrendű elem (mindegyik két 2-ciklus szorzata), és 8 darab 3-ciklus. Tegyük fel, hogy $H \leq A_4$ és $|H| = 6$. Ekkor $H \triangleleft A_4$, mert $|A_4 : H| = 12/6 = 2$. Mivel $2 \mid |H|$, az 1./8-as feladat szerint van benne másodrendű elem, de ezeket 3-ciklusokkal át lehet konjugálni a másik kettőbe, tehát akkor mind a három H-ban van. Ez csak négy elem, tehát van H-ban 3-ciklus is. Viszont ennek a konjugáltja az egyik másodrendűvel nem lehet önmaga vagy az inverze, mert más a fixpontja, tehát harmadrendűből legalább 4 darab van, és így már nem férnek bele a hatodrendű csoportba.