**1.** *Bizonyítsuk be, hogy a kocka szimmetriáinak a csoportja izomorf $S_4 \times C_2$-vel.*

*Megoldás:* Legyen $G$ a keresett csoport, és tekintsük $G$-t a kocka csúcsain ható $S_8$ részcsoportjának. Számítsuk ki először a $G$ rendjét. Az 1-es csúcs orbitja a teljes csúcshalmaz, mert szemközti lapközépppontokat összekötő tengely körüli forgatással el lehet vinni bármely illeszkedő lap bármely másik csúcsába, a szemközti csúcsba meg például középpontos tükrözéssel. Tehát $|G| = 8 \cdot |G_1|$, ahol $G_1$ az 1-es csúcs stabilizátora. Az 1-gyel szomszédos 2 csúcs $G_1$ szerinti orbija 3-elemű: nyilván csak az 1 valamelyik szomszédjába mehet, és az 1-ből kiinduló testátló körüli forgatással bármelyik másik szomszédba átvihető. Így $|G| = 8 \cdot 3 \cdot |G_{1,2}|$. Végül az 1 másik szomszédja, a 3 már csak kétféle helyre mehet (és az lehetséges is az 1-en, a 2-n és a kocka középpontján átfektetett síkra való tükrözéssel), ezért $|G| = 8 \cdot 3 \cdot 2 \cdot |G_{1,2,3}| = 8 \cdot 3 \cdot 2 \cdot |G_{1,2,3,4}| = 48$, ugyanis négy nem egy síkon levő pont képe már meghatározza az egybevágóságot.

Tekintsük a $G$ hatását a kocka négy testátlóján. Ez egy $\varphi : G \to S_4$ homomorfizmus, és a magjában csak az identitás és a középpontos tükrözés van, ugyanis ha egy magbeli egybevágóság nem hagyja helyben valamelyik csúcsot, akkor csak a belőle induló testátló másik csúcsába viheti (hogy a testátló azért még önmagába menjen), de akkor a vele szomszédos csúcsokat is a belőlük induló testátló másik végébe (a kép szomszédaiba) viheti, tehát minden testátlót megfordít, így ez éppen a középpontos tükrözés). Ha $N = \operatorname{Ker}\varphi$, akkor $N \lhd G$, és $|N| = 2$. A homomorfizmustétel szerint $G/\operatorname{Ker}\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi \leq S_4$, tehát $|\operatorname{Im}\varphi| = 48/2 = 24$, így csak a teljes $S_4$ lehet. $G$ irányítástartó egybevágóságai egy $C_2 = \{\pm 1\}$-be menő homomorfizmus magjának elemei (a kép 1, ha az egybevágóság irányítástartó, és $-1$, ha nem), amely szürjektív, mert például a középpontos tükrözés nem irányítástartó. Legyen ez egy $M$ normálosztó, amely így $48/2 = 24$ elemű. Mivel $M \cap N = 1$, azt kapjuk, hogy $MN = M \times N$, és $|M \times N| = 48$ miatt $G = M \times N$. Végül $M \cong (M \times N)/N = G/N \cong S_4$, ezért $G \cong S_4 \times C_2$.

**2.** *Melyik az a legkisebb $n$, amelyre $S_n$, illetve $A_n$ tartalmaz a 8-elemű $D_4$ diédercsoporttal izomorf részcsoportot?*

*Megoldás:* A diédercsoport természetes módon benne van az $S_4$-ben, a négyzet négy csúcsán való hatással. Kisebb $n$-re viszont nem lehet $S_n$-ben, mert 8 nem osztója $n!$-nak, ha $n < 4$.

$A_4$ nem tartalmazhatja $D_4$-et, mert $A_4$ csak 12-elemű, és ugyanígy $|A_5| = 60$ sem osztható 8-cal. Viszont $S_4$-et be lehet ágyazni $A_6$-ba úgy, hogy $g \in S_4$ képe legyen $g$, ha $g$ páros, és $g \cdot (56)$, ha $g$ páratlan. Könnyen ellenőrizhető, hogy ez a leképezés művelettartó, és minden elem képe páros. Ezzel $D_4$-et beágyazzuk $A_6$-ba, tehát $n = 6$ a legkisebb olyan szám, amire $D_4$ beágyazható $A_n$-be.

**3.** *Bizonyítsuk be, hogy minden $s \mid n$-re a $D_s$ diédercsoport előáll a $D_n$ csoport részcsoportjaként és homomorf képeként is.*

*Megoldás:* Ha a szabályos $n$-szög minden $n/s$-edik csúcsát kijelöljük, és $D_s$-t mint ennek az egybevágósági csoportját vesszük, akkor ez részcsoportja lesz az $n$-szög egybevágósági csoportjának, $D_n$-nek.

$D_n$-ben $\langle f \rangle$ minden részcsoportja normálosztó, mert a $t$ tükrözéssel való konjugálás az invertálással hat rajta, $f$ pedig nyilván helybenhagyja. Legyen $H = D_n / \langle f^s \rangle$. A faktorcsoportban $o(\bar{f}) = s$ és $o(\bar{t}) = 2$, $\langle \bar{f} \rangle \cap \langle \bar{t} \rangle = 1$, továbbá $\bar{t}^{-1} \bar{f} \bar{t} = \bar{f}^{-1}$, amiből kijön, hogy $H$-t a $\bar{t}^x \bar{f}^y$ alakú elemek ($0 \le x \le 1$ és $0 \le y \le s-1$) alkotják, és szorzásukra ugyanazt a képletet kapjuk, mint $D_s$-ben, tehát meg tudunk adni $D_s$ és $H$ között egy műveletartó bijekciót.

**4.** *Legyen* $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ *a kvaterniócsoport, amelyben* $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$ $ji = -k$, $kj = -i$, $ik = -j$, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, *és a* $-1$*-gyel való szorzás minden elemet az ellenkező előjelű változatába szoroz. Bizonyítsuk be, hogy így csoportot kapunk, és írjuk föl a művelettábláját. Lássuk be, hogy* $Q$ *minden részcsoportja normálosztó. Bizonyítsuk be, hogy* $Q$ *nem írható föl kisebb csoportok szemidirekt szorzataként.*

*Megoldás:*

| $\cdot$ | $1$ | $-1$ | $i$ | $-i$ | $j$ | $-j$ | $k$ | $-k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1$ | $1$ | $-1$ | $i$ | $-i$ | $j$ | $-j$ | $k$ | $-k$ |
| $-1$ | $-1$ | $1$ | $-i$ | $i$ | $-j$ | $j$ | $-k$ | $k$ |
| $i$ | $i$ | $-i$ | $-1$ | $1$ | $k$ | $-k$ | $-j$ | $j$ |
| $-i$ | $-i$ | $i$ | $1$ | $-1$ | $-k$ | $k$ | $j$ | $-j$ |
| $j$ | $j$ | $-j$ | $-k$ | $k$ | $-1$ | $1$ | $i$ | $-i$ |
| $-j$ | $-j$ | $j$ | $k$ | $-k$ | $1$ | $-1$ | $-i$ | $i$ |
| $k$ | $k$ | $-k$ | $j$ | $-j$ | $-i$ | $i$ | $-1$ | $1$ |
| $-k$ | $-k$ | $k$ | $-j$ | $j$ | $i$ | $-i$ | $1$ | $-1$ |

Az asszociativitás táblázatból való ellenőrzése helyett inkább keressünk a $GL_2(\mathbb{C})$ mátrixcsoportban olyan $A, B, C$ mátrixokat, amelyek 8-elemű részcsoportot generálnak, és kielégítik az $i, j, k$-ra előírt szabályokat. Ezen mátrixok minimálpolinomjának $x^2+1$-nek kell lennie, de egyik sem lehet skalármátrix, hogy ne legyen fölcserélhető a többivel. Természetes választás például az $i, -i$ sajátértékű diagonális mátrix $A$-nak, és $B$ legyen egy olyan mátrix, ami ezt a negatívjába konjugálja: a mellékátlóban 1-et és $-1$-et, máshol 0-kat tartalmazó mátrix, $C$ pedig ezek szorzata. Ellenőrizzük ezeken a szorzási szabályokat! (A különböző sorrendben vett szorzatok könnyebb kiszámolása érdekében az első sorban többször írjuk fel a három mátrixot.)

$$A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad BC = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \quad CA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AC = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad BA = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \quad CB = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$$

és $A^2 = B^2 = C^2 = -I$.

Látható, hogy $Z(Q) = \{\pm 1\}$, és minden nem egyelemű részcsoport tartalmazza $Z(Q)$-t (minden $Z(Q)$-n kívüli elem négyzete $-1$). Mivel a $Q/Z(Q)$ négyelemű csoport szükségképpen Abel-csoport, ennek minden részcsoportja normálosztó, tehát a 3. feladatsor 6. feladata szerint $Q$-nak a $Z(Q)$-t tartalmazó részcsoportjai is normálosztók, s így minden részcsoport normálosztó.

Végül, mivel bármely két nem egyelemű részcsoport metszetében benne van a $Z(Q)$, nyilván nem lehet a $Q$ kisebb csoportok szemidirekt szorzata.

**5.** *Bizonyítsuk be, hogy $S_n$ pontosan akkor tartalmaz a kvaterniócsoporttal izomorf részcsoportot, ha $n \geq 8$.*

*Megoldás:* $S_n$-ben biztosan nem lehet kvaterniócsoport, ha $n < 4$, mert ebben az esetben $n!$ nem is osztható 8-cal. Az $n!$-t osztó legnagyobb 2-hatvány $n = 4, 5, 6, 7$-re $8, 8, 16, 16$. Tudjuk, hogy $S_4$-nek része a $D_4$ diédercsoport (a négyzet négy csúcsán való hatással), ezért $D_4$ a 2-Sylow-részcsoport $S_4$-ben és $S_5$-ben, $S_6$-ban és $S_7$-ben pedig $D_4 \times \langle(56)\rangle$ 16-elemű részcsoport, ezért azoknak ez a 2-Sylowja. Ha $Q$ beágyazható lenne ezeknek a szimmetrikus csoportoknak valamelyikébe, akkor valamelyik 2-Sylowjukba is, s mivel az összes 2-Sylow izomorf (sőt konjugáltak egymással), $D_4$-be vagy $D_4 \times C_2$-be. De ezek közül még a nagyobbikban is csak 4 darab negyedrendű elem van, míg $Q$-ban 6, tehát $Q$ nem ágyazható be $S_n$-be, ha $n < 8$.
$S_8$-ba viszont beágyazható a Cayley-reprezentációval, és akkor persze minden $n \geq 8$-ra is beágyazható az $S_n$-be.

**6.** *Legyen $H \leq S_n$, $|H| > 2$, és tegyük fel, hogy $H$-ban van páratlan permutáció. Bizonyítsuk be, hogy $H$ nem lehet egyszerű.*

*Megoldás:* Legyen $\varphi : H \to C_2$ az a homomorfizmus, amely 1-et vesz föl minden páros permutáción, és $-1$-et minden páratlanon (könnyen látható, hogy ez a leképezés művelettartó). A $\varphi$ homomorfizmus szürjektív, mert $H$-ban van páratlan permutáció (persze páros is, például az 1), ezért $H/\operatorname{Ker}\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi = C_2$, vagyis $\operatorname{Ker}\varphi$ 2 indexű nomálosztó, s mivel $|H| > 2$, ez valódi normálosztó lesz.

**7.** *Legyen a $G$ csoport rendje 2-nél nagyobb, páros, de 4-gyel nem osztható. Bizonyítsuk be, hogy $G$ nem egyszerű.*

*Megoldás:* A Cayley-reprezentáció beágyazza $G$-t az $S_G$ szimmetrikus csoportba, és itt minden nem egységelem fixpontmentes. A Cauchy-tétel miatt $G$-nek van másodrendű eleme, amelynek a képe az előbbi reprezentációnál $|G|/2$ darab — következésképpen páratlan sok — diszjunkt transzpozíció szorzata, tehát páratlan permutáció. Így a 7. feladatból következik, hogy $G$ nem lehet egyszerű.

**8.** *Bizonyítsuk be az alábbi állításokat a centrumról:*
*a)* $Z(G \times H) = Z(G) \times Z(H)$;
*b)* $Z(G)$ *minden részcsoportja normálosztó $G$-ben;*
*c)* $N \lhd G \Rightarrow Z(N) \lhd G$.

*Megoldás:* a) $(g,h) \in Z(G \times H) \Leftrightarrow (x,y)^{-1}(g,h)(x,y) = (g,h)\ \forall x \in G,\ \forall y \in H \Leftrightarrow (x^{-1}gx, y^{-1}hy) = (g,h)\ \forall x \in G,\ \forall y \in H \Leftrightarrow x^{-1}gx = g$ és $y^{-1}hy = h\ \forall x \in G,\ \forall y \in H \Leftrightarrow (g.h) \in Z(G) \times Z(H)$.

b) Ha $a \in H \leq Z(G)$, akkor tetszőleges $g \in G$-re $g^{-1}ag = a \in H$, így $H$ zárt a $G$-beli elemekkel vett konjugálásra.

c) $z \in Z(N) \Leftrightarrow z \in N$ és $z^{-1}nz = n$ minden $n \in N$-re. $Z(N) \leq N \leq G$, tehát csak azt kell belátni, hogy $Z(N)$ zárt a $G$ elemeivel való konjugálásra. Ha $g \in G$ és $z \in Z(N)$, akkor $z^g \in N$, mert $N \lhd G$, és $n \in N$-re $(g^{-1}zg)^{-1}n(g^{-1}zg) = g^{-1}z^{-1}(gng^{-1})zg = g^{-1}(gng^{-1})g = n$, ugyanis $gng^{-1} = (g^{-1})^{-1}ng^{-1}$ is $N$-beli, mivel $N \lhd G$. Tehát $z^g = g^{-1}zg \in Z(N)$.

**9.** *Lássuk be, hogy $Z(S_n) = 1$, ha $n \geq 3$, és $Z(A_n) = 1$, ha $n \geq 4$.*

*Megoldás:* Ha $1 \neq g \in S_n$, ahol $n \geq 3$, akkor $g = (\alpha\beta\ldots)\ldots$, és $\gamma \in \Omega \setminus \{\alpha, \beta\}$-ra $g^{(\beta\gamma)} = (\alpha\gamma\ldots)\ldots \neq g \Rightarrow g \notin Z(G)$.
Ha $1 \neq (\alpha\beta\ldots)\ldots \in A_n$, ahol $n \geq 4$, akkor $\gamma, \delta \in \Omega \setminus \{\alpha, \beta\}$ különböző elemekre $(\beta\gamma\delta) \in A_n$, és $g^{(\beta\gamma\delta)} = (\alpha\gamma\ldots)\ldots \neq g$, tehát $g \notin Z(A_n)$. (Mellesleg a második bizonyítás $g \in S_n$-re is működik, és akkor azt kapjuk, hogy még $C_{S_n}(A_n)$ is 1.)

**10.** *Bizonyítsuk be, hogy $N \triangleleft G$, $|N| = 2$ esetén $N \leq Z(G)$.*

*Megoldás:* A konjugálás helyben hagyja $N$-et, de az 1-et csak önmagába viheti, így $t$-t is helyben hagyja. Ez azt jelenti, hogy $t \in Z(G)$, tehát $N \leq Z(G)$.

**11.** *Határozzuk meg az* $(123)$ *elem centralizátorát $A_4$-ben, $S_4$-ben és $S_5$-ben.*

*Megoldás:* Ha $g \in C_{S_4}((123))$, akkor $(123)^g = (123)$, tehát $1g$, $2g$ és $3g$ az 1, 2 és 3 ebben a sorrendben, vagy ciklikusan permutálva, míg $4g = 4$. Tehát $C_{S_4}((123)) = \langle(123)\rangle$. Mivel ez $A_4$-ben is benne van, $C_{A_4}((123)) = C_{S_4}((123)) = \langle(123)\rangle$. $S_5$-ben viszont $(123)^g = (123)$ esetén $g$ az $1, 2, 3$-at ciklikusan permutálja, de a két fixpontot fel is cserélheti, ezért $C_{S_5}((123)) = \langle(123), (45)\rangle \cong C_3 \times C_2 \cong C_6$.

**12.** *Bizonyítsuk be, hogy ha $P \in Syl_p(G)$, és $N \triangleleft G$, akkor $N \cap P \in Syl_p(N)$.*

*Megoldás:* $|N \cap P| \mid |P|$, ezért $|N \cap P|$ is $p$-hatvány. Másrészt $\frac{|N|}{|N \cap P|} = \frac{|NP|}{|P|}$ osztója $\frac{|G|}{|P|}$-nek, ezért nem osztható $p$-vel. Így $|N \cap P|$ a maximális $p$-hatvány, ami osztója $|N|$-nek, tehát $N \cap P \in Syl_p(N)$.

**Hf1.** *Bizonyítsuk be, hogy $S_5$ tartalmaz $D_6$-tal izomorf (nem tranzitív) részcsoportot. Keressünk a szabályos hatszögön öt olyan alakzatot, amelyeknek a halmazán a hatszög szimmetriái hűségesen hatnak!*

**Hf2.** *Legyen $p$ prím, és $|G| = p^n$, továbbá $1 \neq N \triangleleft G$. Bizonyítsuk be, hogy $N \cap Z(G) \neq 1$.*