1. *Legyen $H < G$, $|G : H| \leq n$, és $|G| > n!$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor G nem lehet egyszerű.*

Megoldás: Legyen $k = |G : H|$, és $\varphi : G \to S_k$ a H jobb mellékosztályain jobbszorzással való csoporthatás. Mivel $|S_k| = k! \leq n! < |G|$, a csoporthatás nem lehet hűséges, azaz $1 \neq \operatorname{Ker}\varphi \lhd G$. Viszont $\operatorname{Ker}\varphi \leq H < G$, ezért $\operatorname{Ker}\varphi$ valódi normálosztó G-ben.

2. *Bizonyítsuk be, hogy egy p-csoportban minden normálosztókból álló normállánc finomítható olyan normálosztókból álló normállánccá, amelyikben a faktorok p-edrendűek.*

Megoldás: A csoport rendjére vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk az állítást. $|G| = p$ esetén nincs mit finomítani. Legyen $|G| = p^n$, és tegyük fel, hogy kisebb rendűekre igaz. Legyen a megadott normállánc $1 = N_0 < N_1 < \ldots < N_k = G$. Mivel $1 \neq N_1 \lhd G$, tudjuk, hogy $Z(G) \cap N_1 \neq 1$ (ld. 5/Hf2. feladat). A Cauchy-tétel szerint ebben van p-edrendű, részcsoport, legyen ez Z. Ekkor $Z \leq Z(G)$ miatt $Z \lhd G$, és $Z \leq N_1$ miatt G/Z-nek normálosztókból álló normállánca az $1 \leq N_1/Z < N_2/Z < \ldots < G/Z$. Az indukciós feltevés szerint ezt finomítani lehet olyan normálosztókból álló lánccá, amelyeknek a faktorai p-edrendűek, és annak az ősképe G-ben az $1 < Z$ lánchoz hozzáillesztve megfelelő finomítását adja a G eredetileg megadott normálláncának.

3. *Bizonyítsuk be, hogy G nem lehet egyszerű, ha $|G| = 36$, 56, vagy 80.*

Megoldás: Ha $|G| = 36 = 2^2 3^2$, akkor G 3-Sylow-részcsoportja 9-elemű, tehát 4 indexű részcsoport. Mivel $|G| > 4!$, az 1. feladat szerint G nem lehet egyszerű.

Ha $|G| = 56$, és $P \in Syl_7(G)$, akkor $|Syl_7(G)| \equiv 1 \pmod 7$, és $|Syl_7(G)| \mid |G : P| = 8$ miatt $|Syl_7(G)| = 1$ vagy 8. Az első esetben $P \lhd G$, tehát G nem egyszerű. Ha viszont 8 darab 7-Sylow van, akkor — mivel ezek prímrendű csoportok, tehát nem metszhetnek egymásba — a 7-Sylowok összesen tartalmaznak $8 \cdot 6 = 48$ darab 7-edrendű elemet. Így G-ben legföljebb $56 - 48 = 8$ nem hetedrendű eleme van. Tetszőleges 2-Sylow csak ebben a 8-elemű halmazban lehet benne, de a 2-Sylowok is 8 eleműek, ezért ezek mind megegyeznek, azaz a 2-Sylow normálosztó. Így arra jutottunk, hogy ebben az esetben sem egyszerű a G csoport.

Ha $|G| = 80$, akkor $|Syl_5(G)| \equiv 1 \pmod 5$, és $|Syl_5(G)| \mid 16$, ezért $|Syl_5(G)| = 1$ vagy 16. Ugyanúgy, mint az előző esetben, vagy azt kapjuk, hogy az 5-Sylow normálosztó, vagy elemszámlálással látjuk, hogy az 5-ödrendű elemek lefednek 64 elemet a 80-ból, tehát a maradék 16-elemű halmazba már csak egy 2-Sylow fér bele, ezért ilyenkor a 2-Sylow lesz normálosztó.

4. *a) Hány 3-, 5-, illetve 7-Sylow részcsoportja lehet egy 105 elemű G csoportnak?*
b) Bizonyítsuk be, hogy ennek a csoportnak valamelyik p-Sylowja normálosztó.
c) Bizonyítsuk be, hogy a 7-Sylow mindenképpen normálosztó.

Megoldás: a) $|Syl_3(G)| \equiv 1 \pmod 3$, és osztója 35-nek, tehát 1 vagy 7.
$|Syl_5(G)| \equiv 1 \pmod 5$, és osztója 21-nek, tehát 1 vagy 21.
$|Syl_7(G)| \equiv 1 \pmod 7$, és osztója 15-nek, tehát 1 vagy 15.

b) Az előbbiekből látható, hogy vagy normálosztó a 7-Sylow, vagy elemszámlálással kijön, hogy a hetedrendű elemek lefednek a 105-ből $6 \cdot 15 = 90$ elemet, tehát az összes 3- és 5-Sylow benne van a maradék 15-elemű halmazban. De ha az 5-Sylow nem normálosztó, akkor van belőle 21, és azok nem férnek el (mivel prímrendűek, így páronkén diszjunktak). Tehát ebben az esetben az 5-Sylow lesz normálosztó.

c) A b) rész második esetében legyen $P_5 \triangleleft G$ az 5-Sylow. Ekkor $|G/P_5| = 21$, és így ebben a 7-Sylow szükségképpen normálosztó. De akkor annak az ősképe G-ben $N \triangleleft G$, amelyre $|N/P_5| = 7$, azaz $|N| = 35$. Viszont egy 35-elemű csoportban is normálosztónak kell lennie a 7-Sylownak, tehát N-ben egyetlen 7-Sylow van, és a G összes 7-Sylowja ennek konjugáltja, tehát szintén benne vannak az N-ben, ezért $|Syl_7(G)| = 1$, vagyis a 7-Sylow normálosztó G-ben.

5. *A Sylow-részcsoportok vizsgálatával bizonyítsuk be, hogy minden* 15*-ödrendű csoport ciklikus.*

Megoldás: Legyen $|G| = 15$, és $P_3 \in Syl_3(G)$, $P_5 \in Syl_5(G)$. Mivel $|Syl_3(G)| \equiv 1 \pmod 3$ és osztója 5-nek, $|Syl_3(G)| = 1$, és így $P_3 \triangleleft G$. Ugyanígy $|Syl_5(G)| \equiv 1 \pmod 5$ és osztója 3-nak, tehát $|Syl_5(G)| = 1$, és így $P_5 \triangleleft G$. De a P_3 és P_5 normálosztókra $P_3 \cap P_5 = 1$, mert relatív prím rendűek, és $|P_3P_5| = \frac{|P_3||P_5|}{|P_3 \cap P_5|} = 15 = |G|$ miatt $P_3P_5 = G$, tehát $G = P_3 \times P_5 \cong C_3 \times C_5 \cong C_{15}$, ahol kihasználjuk, hogy P_3 és P_5 prímrendű, tehát ciklikus, és hogy relatív prím rendű ciklikusok direkt szorzata maga is ciklikus.

6. *Hány eleme van a* $\mathbb{Z}_2$ *fölötti* 3×3*-as invertálható mátrixok csoportjának,* $GL_2(\mathbb{Z}_3)$*-nek? Adjuk meg ennek a csoportnak egy* 2*-Sylow-részcsoportját.*

Megoldás: Egy 3×3-as mátrix pontosan akkor invertálható, ha a három sora független. Tehát $GL_2(\mathbb{Z}_3)$-nak annyi eleme van, ahányféleképpen ki lehet választani három független vektort $\mathbb{Z}_2^3$-ból. Az első sor bármely nem nulla vektor lehet, tehát $2^3 - 1 = 7$-féle, a második sor nem lehet ennek skalárszorosa, így ennek a kiválasztására $2^3 - 2 = 6$ lehetőség van, végül a harmadik bármi lehet, ami nem függ ettől a két független vektortól, s mivel ezeknek $2^2 = 4$ különböző lineáris kombinációja van, a harmadik sor $2^3 - 2^2 = 4$-féle lehet. Tehát $|GL_2(\mathbb{Z}_3)| = 7 \cdot 6 \cdot 4 = 168$.
$168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$, így a csoport 2-Sylowja 8-elemű. Ilyen méretű részcsoportot viszont könnyen találunk: az invertálható felső háromszögmátrixok nyilván részcsoportot alkotnak, és ezekből éppen 8 darab van (az átlós elemek csak 1-ek lehetnek, és a fölötte levő három mindegyike 0 vagy 1).

7. *Izomorfia erejéig hány Abel-csoport van, amelynek rendje*
a) 32*;*
b) 360*?*

Megoldás: a) Az Abel-csoport kanonikus alakjában mindegyik ciklikus csoport 2-hatványrendű, és a rendek szorzata $32 = 2^5$, tehát annyiféle csoportot kapunk, ahányféleképpen fel lehet bontani az 5-öt pozitív egészek összegére: 5, $4+1$, $3+2$, $3+1+1$, $2+2+1$, $2+1+1+1$ és $1+1+1+1+1$. Ez hét nem izomorf Abel-csoportot ad: C_{32}, $C_{16} \times C_2$, $C_8 \times C_4$, $C_8 \times C_2 \times C_2$, $C_4 \times C_4 \times C_2$, $C_4 \times C_2 \times C_2 \times C_2$ és $C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2$.

b) $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$. A csoport kanonikus alakjában a 2-hatványrendű rész (a csoport 2-Sylowja) 3-féle lehet ($3 = 3,\ 2+1, 1+1+1$), a 3-Sylow 2-féle, az 5-Sylow pedig egyféle, tehát $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ ilyen Abel-csoport van.

8. *Hány* 12*-edrendű részcsoportja van a* $C_4 \times C_2 \times C_9$ *Abel-csoportnak? Ebből hány nem ciklikus?*

Megoldás: Abel-csoportban minden p prímre egyetlen p-Sylow van, és ez tartalmazza az összes p-hatványrendű elemet. Tehát ha a $G \cong C_4 \times C_2 \times C_9$ csoport 2-Sylowja G_2, 3-Sylowja G_3, és egy $H \leq G$ részcsoport 2-, illetve 3-Sylowja H_2 és H_3, akkor $H_2 \leq G_2 \cong C_4 \times C_2$, és $H_3 \leq G_3 \cong C_9$. De $|H| = 12 \Rightarrow |H_2| = 4$ és $|H_3| = 3$. A ciklikus G_3-nak csak egy harmadrendű részcsoportja lehet, tehát H_3 egyértelmű. H_2 vagy C_4-gyel, vagy $C_2 \times C_2$-vel izomorf. Az első esetben G_2 negyedrendű elemeit kell összeszámolni, és elosztani kettővel (ugyanis egy negyedrendű ciklikus csoport generátora kétféle elem is lehet), így az ilyen H_2-k száma $2 \cdot 2/2 = 2$. A másodikban H_2 minden $\neq 1$ eleme másodrendű, tehát benne van a $C_2 \times C_2$ részcsoportban, de $|H_2| = 4$, így ez egyértelmű. Azt kaptuk, hogy összesen három 12-edrendű részcsoport van, és ebből kettő $C_4 \times C_3 \cong C_{12}$-vel izomorf, tehát ciklikus, a harmadik pedig $C_2 \times C_2 \times C_3$-mal izomorf, így nem ciklikus.

9*. *Tegyük fel, hogy* $5 \mid |G|$ *és* $|G| \mid 100$. *Bizonyítsuk be, hogy ekkor* G*-nek van* 5 *indexű részcsoportja.*

Megoldás: Ha 25 nem osztója $|G|$-nek, akkor a 2-Sylow 5 indexű, ha $|G| = 25$, akkor pedig tudjuk, hogy G-ben van ötödrendű részcsoport.
Tegyük fel most, hogy $|G| = 50$ vagy 100. Vegyük észre, hogy $|Syl_5(G)| \equiv 1 \pmod 5$ és $|Syl_5(G)| \mid 4$ miatt csak egyetlen 5-Sylow lehet a csoportban, és így az normálosztó. Legyen az 5-Sylow P. Mivel P prímnégyzet elemszámú, csak Abel-csoport lehet, tehát vagy C_{25}-tel, vagy $C_5 \times C_5$-tel izomorf. Belátjuk, hogy G-ben van ötödrendű normálosztó is, és akkor ez a 2-Sylowval együtt 5 indexű részcsoportot generál.
Ha $P \cong C_{25}$, akkor ennek egyetlen ötödrendű részcsoportja van, és $P \lhd G$ miatt ez is normálosztó, ugyanis minden konjugálás P-ben hagyja, és ötödrendű részcsoportba viszi, tehát helyben hagyja ezt a részcsoportot.
Ha $P \cong C_5 \times C_5$, akkor ez multiplikatívan írt, $\mathbb{Z}_5$ fölötti kétdimenziós vektortérnek tekinthető, amin a csoport elemei a konjugálással automorfizmusként, azaz invertálható lineáris transzformációként hatnak. Mivel P Abel, tetszőleges részcsoportját normalizálja, tehát elég belátni azt, hogy valamelyik 2-Sylow-részcsoport (amely a feltételek miatt 2 vagy 4 elemű, tehát C_2, C_4 vagy $C_2 \times C_2$) normálizálja P valamelyik ötelemű részcsoportját. Vektortérre átfogalmazva: Ha egy $\mathbb{Z}_5$ fölötti 2-dimenziós V vektortérnek adva van egy másod- vagy negyedrendű lineáris transzformációja, akkor annak van sajátvektora, illetve ha van két egymással felcserélhető másodrendű lineáris transzformációja (a $C_2 \times C_2$ eset), akkor azoknak van közös sajátvektoruk.
Az első esetben a transzformáció (illetve a mátrix) minimálpolinomja osztója az $x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x^2-1)(x^2-4) = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$ polinomnak, így van sajátértéke $\mathbb{Z}_5$-ben, és akkor van sajátvektora V-ben.
A másodikban legyen A és B a két transzformáció mátrixa. Mindkettőnek a minimálpolinomja osztója az $x^2 - 1$ polinomnak, így diagonalizálhatók, és csak ± 1 lehetnek a sajátértékeik. Ha A skalármátrix, akkor a B-nek egy tetszőleges sajátvektorát ez is helyben hagyja, tehát találtunk egy egydimenziós invariáns alteret. Ha nem, akkor $A \sim diag(1, -1)$, tehát például az 1-hez tartozó sajátaltere egydimenziós. Viszont A sajátalterét az A-val felcserélhető B mátrix is helyben hagyja: ha $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, akkor $A(B\mathbf{v}) = (AB)\mathbf{v} = (BA)\mathbf{v} = B(A\mathbf{v}) = B\lambda\mathbf{v} = \lambda(B\mathbf{v})$, így ekkor is találunk V-ben olyan egydimenziós alteret, amely A-ra és B-re is invariáns.