1. *Bizonyítsuk be a kommutátor-részcsoportokról a következő állításokat!*

a) $(G \times H)' = G' \times H'$;

b) $H \leq G$ *esetén* $H' \leq G' \cap H$, *de nem feltétlenül egyenlők;*

c) $\varphi : G \to H$ *homomorfizmusra* $\varphi(G') = (\varphi(G))'$.

Megoldás:

a) $[g_1h_1, g_2h_2] = (g_1h_1)^{-1}(g_2h_2)^{-1}g_1h_1g_2h_2 = g_1^{-1}g_2^{-1}g_1g_2h_1^{-1}h_2^{-1}h_1h_2 = [g_1, g_2][h_1, h_2]$ $G' \times H'$-ben van $\Rightarrow (G \times H)' \leq G' \times H'$. Másrészt $G \leq G \times H \Rightarrow G' \leq (G \times H)'$, és ugyanígy $H' \leq (G \times H)'$, tehát $G' \times H' = \langle G', H' \rangle \leq (G \times H)'$

b) Minden $h_1, h_2 \in H$-ra $[h_1, h_2] \in G'$, és nyilván H-beli, így $[h_1, h_2] \in G' \cap H$, és akkor a generált altér, H' is $G' \cap H$-ban van. De általában nem egyenlők, pl. $G = S_3$ és $H = \langle (123) \rangle$-ra $H' = 1$, de $G' \cap H = A_3 \cap H = H$.

c) A $\varphi(G)'$ csoport generátorai $[\varphi(x), \varphi(y)] = \varphi(x)^{-1}\varphi(y)^{-1}\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x^{-1}y^{-1}xy) = \varphi([x, y])$ éppen a G' generátorainak képei, tehát $\varphi(G)' = \varphi(G')$.

2. *Határozzuk meg a következő csoportok centrumát és kommutátor-részcsoportját!*

a) S_n *b)* D_n *c) egy* p^3 *rendű nem-Abel csoport d)* $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \middle| \; a, b, c \in \mathbb{Z}_3, \; a, c \neq 0 \right\}$

Megoldás: a) Előadáson bizonyítottuk, hogy $Z(S_n) = 1$, ha $n \geq 3$, és nyilvánvaló, hogy $Z(S_1) = S_1$ és $Z(S_2) = S_2$. Másrészt $S_n/A_n \cong C_2$ ($n = 1$ esetén 1), ezért $S_n' \leq A_n$. Viszont $n \geq 5$ esetén A_n-nek nincs valódi normálosztója, és $S_n/1$ nem kommutatív, tehát ilyenkor A_n a legkisebb olyan normálosztó, amellyel vett faktor kommutatív, azaz $S_n' = A_n$. Az S_4 összes normálosztóját ismerjük: $1 \leq K = \langle (12)(34), (13)(24) \rangle \leq A_4 \leq S_4$, és ebből a K-val vett faktorcsoport S_3-mal izomorf, tehát nem kommutatív, így $S_4' = A_4$. S_3-ban is A_3 a legkisebb, Abel faktorú normálosztó, végül $n = 1, 2$-re $S_n' = 1 = A_n$. Tehát minden n-re igaz, hogy $S_n' = A_n$.

b) Semelyik tükrözés nincs a centrumban, mert a tükrözések nem felcserélhetők az f-fel: $(tf^k)^{-1}f(tf^k) = f^{-k}f^{-1}f^k = f^{-1}$. Másrészt $t^{-1}f^kt = f^{-k}$ csak akkor egyenlő f^k-val, ha $f^{2k} = 1$, vagyis páratlan n-re a forgatások közül csak az 1 van a centrumban, páros n-re pedig az $\langle f \rangle$ másodrendű eleme, ami a 180°-os forgatás. Tehát $Z(D_n) = 1$, ha n páratlan, és $Z(D_n) = \langle f^{n/2} \rangle \cong C_2$, ha n páros.

$[t, f] = t^{-1}f^{-1}tf = (t^{-1}ft)^{-1}f = (f^{-1})^{-1}f = f^2$, ezért $\langle f^2 \rangle \leq D_n'$. Továbbá $\langle f^2 \rangle \lhd D_n$, mert a t-vel való konjugálás az inverzébe viszi, az f-fel való pedig helyben hagyja. Viszont $|\langle f \rangle : \langle f^2 \rangle| = 1$ vagy 2 aszerint, hogy n páratlan vagy páros, ezért $|D_n : \langle f^2 \rangle| = 2$ vagy 4, és ebből mindkét esetben következik, hogy $D_n / \langle f^2 \rangle$ Abel-csoport, így $D_n' \leq \langle f^2 \rangle$, tehát $D_n' = \langle f^2 \rangle$.

c) A centrumról a zh-n bizonyítottuk, hogy p-elemű:
$|Z(G)|$ osztója $|G| = p^3$-nek, tehát csak $1, p, p^2$ vagy p^3 lehet.
1 nem lehet, mert tudjuk, hogy véges p-csoport centruma nem triviális.
p^3 nem lehet, mert akkor G kommutatív lenne.
Ha $|Z(G)| = p^2$, akkor $|G/Z(G)| = p \Rightarrow G/Z(G) \cong C_p$, és tanultuk, hogy ha a centrummal vett faktor ciklikus, akkor a csoport kommutatív (ui. $Z(G)$ és még egy elem kigenerálja a teljes csoportot, és ennek a generátorrendszernek az elemei páronként felcserélhetők egymással), tehát itt is ellentmondásra jutunk.
Így $Z(G) \cong C_p$.

$Z(G) \lhd G$, és $|G/Z(G)| = p^2$ az előbbiek szerint, és minden p^2-rendű csoport kommutatív, így $G' \leq Z(G)$. Viszont $Z(G)$-nél kisebb csak az 1 lehet, és $G/1 = G$ nem kommutatív, így $G' = Z(G) \cong C_p$.

d) A megadott halmaz valóban csoportot alkot, mert invertálható felső háromszögmátrixok szorzata és inverze is olyan. Nevezzük ezt a csoportot G-nek. Ekkor $|G| = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax & ay + bz \\ 0 & cz \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax & bx + cy \\ 0 & cz \end{bmatrix}$$

akkor egyenlő minden x, y, z-re (ahol $xz \neq 0$), ha $b = 0$ (pl. $x = 1$, $y = 0$, $z = -1$ esetén), és $a = c$ (pl. $x = y = z = 1$ esetén), tehát csak a két skalármátrix lehet a centrumban, és azok valóban felcserélhetők minden mátrixszal, ezért

$$Z(G) = \{\, aI \mid a \in \mathbb{Z}_3 \setminus \{\, 0 \,\}\,\}.$$

G-ben az $\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrixok 3-elemű N csoportja normálosztó, ugyanis

$$\begin{bmatrix} a^{-1} & * \\ 0 & c^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & * \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A G/N faktorcsoport 4-edrendű, így szükségképpen kommutatív, ezért $N \geq G'$. Viszont $G/1 = G$ nem kommutatív, például $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ nem felcserélhetők, így

$$G' = N = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; b \in \mathbb{Z}_3 \right\}.$$

3. *Bizonyítsuk be, hogy ha H maximális valódi részcsoportja G-nek, akkor $H \geq Z(G)$ vagy $H \geq G'$.*

Megoldás: Ha $Z(G) \not\leq H$, akkor a $H < HZ(G) \leq G$, és H maximalitása miatt $HZ(G) = G$. De akkor minden $g \in G$ felírható hz alakban, ahol $h \in H$ és $z \in Z(G)$, és az ilyen elemek kommutátora

$$[h_1 z_1, h_2 z_2] = z_1^{-1} h_1^{-1} z_2^{-1} h_2^{-1} h_1 z_1 h_2 z_2 = z_1^{-1} z_1 z_2^{-1} z_2 h_1^{-1} h_2^{-1} h_1 h_2 = [h_1, h_2] \in H,$$

ezért $G' \leq H$.

4. *Bizonyítsuk be, hogy a G csoport feloldható, ha G rendje*

a) p^2q^2, ahol p és q különböző prímek;

b) pqr, ahol p, q, r különböző prímek;

c) p^3q, ahol p és q különböző prímek.*

Megoldás: a) Feltehető, hogy $p > q$. Legyen $P \in Syl_p(G)$. Tudjuk, hogy $|Syl_p(G)| \equiv 1 \pmod p$ és $|Syl_p(G)| \mid q^2$. Mivel $q < p$, az osztók közül csak 1 és q^2 jön szóba. Az

első esetben $P \lhd G$, és P p-csoport, G/P pedig q-csoport, ezért mindkettő feloldható, s így G is feloldható.
A második esetben $p \mid q^2 - 1 = (q-1)(q+1)$. De $q - 1 < p$, és p prím, így $p \mid q + 1$, s mivel $q + 1 \le p$, csak $p = q + 1$, azaz $q = 2$ és $p = 3$ lehetséges, vagyis $|G| = 36$. Ebben $|G : P| = 4$, ezért van egy homomorfizmus G-ből S_4-be a P mellékosztályain való hatással. Mivel $|G| > |S_4|$, ennek a magja nem 1, és benne van P-ben, tehát nem is az egész G. Ha N ennek a homomorfizmusnak a magja, akkor N p-csoport, így feloldható, és $|G/N| = q^2$ vagy pq^2, és az ilyen csoportokról az előadáson beláttuk, hogy feloldhatók. Tehát G is feloldható.

b) Feltehető, hogy $p > q > r$. Legyen $P \in Syl_p(G)$. A p-Sylowok száma kongruens 1-gyel modulo p, és osztója qr-nek, de $1 < q, r < p$, így csak 1 vagy qr lehet. Ha 1, akkor $P \lhd G$ feloldható, és $|G/P| = qr \Rightarrow G/P$ szintén feloldható az előadáson bizonyítottak szerint, így G is feloldható. Ha qr darab p-Sylow van, akkor — mivel a különböző p-rendű ciklikus részcsoportok diszjunktak — G-ben $qr(p-1)$ darab p-edrendű elem van, a maradék benne van egy $pqr - pq(p-1) = qr$ elemű részhalmazban. Ennek tartalmaznia kell az összes q-Sylowot, de azok is diszjunktak, és $q + 1$ darab már nem fér el belőlük $((q-1)(q+1) > (q-1)q \ge rq)$, ezért G-nek egyetlen q-Sylowja van. Ez azt jelenti, hogy a Q q-Sylow részcsoport normálosztó G-ben, és feloldható is, továbbá $|G : Q| = pr$ miatt G/Q is feloldható, ezért G is feloldható.

5. *Adjuk meg egy kompozícióláncát a D_n diédercsoportnak és a $GL_2(\mathbb{Z}_3)$ csoportnak.*

Megoldás: D_n-nek normálosztója $\langle f \rangle \cong C_n$, és $D_n / \langle f \rangle \cong C_2$. A C_n ciklikus csoportnak van kompozícióslánca prímrendű faktorokkal: ha $n = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}$, akkor a $p_1, \dots, p_1^{a_1}, p_1^{a_1} p_2, \dots, \dots, n$ rendű egyértelmű részcsoportok (és persze normálosztók) ilyen láncot adnak. Mivel $D_n / \langle f \rangle$ is egyszerű, így D_n-nek is kompozícióláncát kapjuk.
A $G = GL_2(\mathbb{Z}_3)$ csoport rendje $(3^2 - 1)(3^2 - 3) = 48$. Hattassuk a G-t a $\mathbb{Z}_3$ fölötti kétdimenziós tér négy egydimenziós alterén: $\varphi : G \to S_4$. A hatás magjában azok a mátrixok vannak, amelyeknek minden nem nulla vektor sajátvektora, azaz a két invertálható skalármátrix, $\pm I$, így $|\operatorname{Im} \varphi| = \frac{48}{2} = 24 \Rightarrow G/\operatorname{Ker} \varphi \cong \operatorname{Im} \varphi = S_4$, tehát az S_4 kompozícióláncának, az $1 \lhd \langle (12)(34) \rangle \lhd K \lhd A_4 \lhd S_4$ normálláncnak az ősképe kiegészíti az $1 \lhd \operatorname{Ker} \varphi$ láncot G kompozícióláncává, amelynek faktorai C_2, C_2, C_2, C_3, C_2.
Ha konkrétan meg akarjuk adni a kompozíciólánc elemeit G-ben, érdemes észrevenni, hogy az 1 determinánsú mátrixokból álló, $\operatorname{Ker} \varphi$-t tartalmazó $SL_2(\mathbb{Z}_3)$ egy 2 indexű részcsoportba képződik, így csak ez lehet $\varphi^{-1}(A_4)$. $\varphi^{-1}(K)$ az $SL_2(\mathbb{Z}_3)$ egyetlen 2-Sylowja, tehát csak elegendő számú, 2-hatvány rendű mátrixot kell találni a generálásához, pl. negyedrendűeket, azaz, amelyeknek a karakterisztikus polinomja $x^2 + 1$: $\varphi^{-1}(K) = \left\langle \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\rangle$. Végül ebből egy negyedrendű részcsoport, mondjuk, $\left\langle \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$ jó lesz előző láncszemnek. Tehát $GL_2(\mathbb{Z}_3)$ kompozíciólánca:

$$1 \lhd \{\pm I\} \lhd \left\langle \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle \lhd \left\langle \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\rangle \lhd SL_2(\mathbb{Z}_3) \lhd GL_2(\mathbb{Z}_3).$$

6. *a) Bizonyítsuk be, hogy az x, y elemek által generált szabad csoportot az $\{x, xy\}$ halmaz is szabadon generálja.*

b) Bizonyítsuk be, hogy ugyanebben a csoportban az $S = \{\, x, y^{-1}xy, y^{-2}xy^2 \,\}$ halmaz szabadon generálja a $\langle S\rangle$ részcsoportot.

Megoldás: a) Vegyük azt az $F(x,z)$ szabad csoportból $F(x,y)$-ba menő homomorfizmust, amely az $x \mapsto x$, $z \mapsto xy$ leképezés kiterjesztése. Belátjuk, hogy egy redukált szó képének redukált alakjában y ugyanannyiszor és ugyanolyan kitevőn szerepel, mint az eredeti szóban a z. Az állítást az eredeti szó hosszára vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk, és az indukciós feltevés tartalmazza azt is, hogy adott végződésű szó képe hogyan végződik az $F(x,y)$-beli redukált alakjában.

	z	z^{-1}	x	x^{-1}
$\dots z \mapsto \dots y$	$\dots y$	—	$\dots x$	$\dots yx^{-1}$
$\dots z^{-1} \mapsto \dots y^{-1}x^{-1}$	—	$\dots y^{-1}x^{-1}$	$\dots y^{-1}$	$\dots x^{-1}x^{-1}$
$\dots x \mapsto \dots x$ vagy $\dots y^{-1}$	$\dots y$	$\dots y^{-1}x^{-1}$	$\dots x$	—
$\dots x^{-1} \mapsto \dots x^{-1}$, de nem $\dots y^{-1}x^{-1}$	$\dots y$	$\dots y^{-1}x^{-1}$	—	$\dots x^{-1}x^{-1}$

Így a magban nem lehet olyan redukált szó, ami tartalmaz z-t, viszont x^k képe, x^k sem 1, ha $k \neq 0$. Tehát a homomorfizmus injektív, így $\langle x, xy\rangle$ izomorf a két elemmel generált szabad csoporttal, ahol a szabad generátorok x és xy

b) Vegyük azt az $F(u,v,w)$ szabad csoportból $F(x,y)$-ba menő homomorfizmust, amely az $u \mapsto x$, $v \mapsto y^{-1}xy$, $w \mapsto y^{-2}xy^2$ leképezés kiterjesztése. Ez egy n hosszúságú redukált szóhoz olyan $F(x,y)$-beli szót rendel, amelynek a redukált alakjában az $x^{\pm 1}$ megjelenéseinek a száma pontosan n, ugyanis az azonos típusú (u, v vagy w, illetve ezek inverzei) összevonásából keletkezett részszó redukált alakjának elején és végén ugyanaz az y-hatvány szerepel, ami az u, v, illetve w elején és végén, és csak a belső y-ok esnek ki, és ezután a különböző blokkok összeszorzásánál nem nyelődik el a teljes y-hatvány, így az x-ek végig ugyanolyan kitevőn maradnak. Ez azt jelenti, hogy a leképezés magjában csak az 1 van, tehát $\langle S\rangle$ izomorf a három elemmel generált szabad csoporttal, ahol a szabad generátorok az S elemei.

7. *Bizonyítsuk be a következő izomorfiákat a relációkkal megadott csoportokra.*
a) $\langle x, y, z \,|\, x^2 = y^2 = z^3 = 1,\ xy = yx,\ z^{-1}xz = y,\ z^{-1}yz = xy\rangle \cong A_4$;
b) $\langle x, y \,|\, x^2 = y^2 = 1,\ xyxy = yxyx\rangle \cong D_4$;
c) $\langle x, y \,|\, x^2 = y^2 = 1\rangle$ *minden véges nem kommutatív homomorf képe izomorf valamelyik diéder csoporttal.*

Megoldás: a) Az A_4-ben $a = (12)(34)$, $b = (13)(24)$ és $c = (132)$ kielégítik az $a^2 = b^2 = c^3 = 1$, $ab = ba$, $a^c = b$ és $b^c = ab$ relációkat, és $A_4 = \langle a, b, c\rangle$ ezért a Dyck-tétel szerint A_4 homomorf képe a relációkkal megadott G csoportnak. Másrészt G-ben $xy = yx$ miatt $\langle x\rangle, \langle y\rangle \lhd \langle x, y\rangle$, így $|\,\langle x, y\rangle\,| = |\,\langle x\rangle\langle y\rangle\,| \le |\,\langle x\rangle\,| \cdot |\,\langle y\rangle\,| \le 2 \cdot 2 = 4$, és $z \in N_G(\langle x, y\rangle)$ mert mindkét generátorelemet a részcsoporton belülre konjugálja, ezért $\langle x, y\rangle \lhd \langle x, y, z\rangle = G$, amiből $|G| = |\,\langle x, y\rangle\langle z\rangle\,| \le |\,\langle x, y\rangle\,| \cdot |\,\langle z\rangle\,| \le 4 \cdot 3 = 12 = |A_4|$, így a G-ből A_4-be menő szürjektív homomorfizmus csak izomorfizmus lehet.

b) $D_4 = \langle t, f\rangle = \langle t, tf\rangle$, és a t, tf generátorok kielégítik a megadott relációkat: $t^2 = 1$, $(tf)^2 = 1$, és $t(tf)t(tf) = ff = f^2$ egyenlő $(tf)t(tf)t = tfft = t^{-1}f^2t = f^{-2} = f^2$-tel, tehát D_4 homomorf képe a relációkkal megadott G csoportnak. Másrészt G-ben $1 = xyxyx^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1} = xyxyxyxy = (xy)^4$, és $x^{-1}(xy)x = yx = y^{-1}x^{-1} = (xy)^{-1}$, így $\langle xy\rangle \lhd \langle xy, x\rangle = \langle x, y\rangle = G \Rightarrow |G| = |\langle xy\rangle \langle x\rangle| \leq |\langle xy\rangle| \cdot |\langle x\rangle| \leq 4 \cdot 2 = 8$, tehát a G-ből D_4-be menő szürjektív homomorfizmus csak izomorfizmus lehet.

c) Tegyük fel, hogy H véges nem kommutatív csoport, mely homomorf képe a megadott relációkkal generált csoportnak. Ekkor $H = \langle a, b\rangle$, ahol $a^2 = b^2 = 1$. Legyen $n = o(ab)$. Mivel $a^{-1}(ab)a = ba = b^{-1}a^{-1} = (ab)^{-1}$, a $H = \langle a, b\rangle = \langle ab, a\rangle$ csoport homomorf képe a $G = \langle x, y \mid x^n = 1,\ y^2 = 1,\ y^{-1}xy = x^{-1}\rangle$ relációkkal definiált csoportnak, és ugyanígy $D_n = \langle f, t\rangle$ is homomorf képe G-nek. Viszont $|G| = |\langle x\rangle \langle y\rangle| \leq 2n$, míg $\langle ab\rangle < H$, mivel H nem kommutatív, tehát $|H| \geq 2n$, és $|D_n| = 2n$, tehát mindkét homomorfizmus izomorfizmus, és így $H \cong G \cong D_n$.

8*. *Bizonyítsuk be, hogy* $\langle x, y, z \mid y^{-1}xy = x^2,\ z^{-1}yz = y^2,\ x^{-1}zx = z^2\rangle = 1$.

9. *Adjuk meg definiáló relációkkal a következő csoportokat:*

a) $C_2 \times C_2 \times C_4$ *b)* $C_3 \times C_8$

Megoldás: a) $G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^4 = 1,\ xy = yx,\ xz = zx,\ yz = zy\rangle$ relációit kielégítik a három direkt komponens generátorelemei, így $C_2 \times C_2 \times C_4$ homomorf képe G-nek, másrészt G a három felcserélhetőségi reláció miatt kommutatív, és így $|G| = |\langle x, y, z\rangle| = |\langle x\rangle \langle y\rangle \langle z\rangle| \leq |\langle x\rangle| \cdot |\langle y\rangle| \cdot |\langle z\rangle| \leq 2 \cdot 2 \cdot 4 = 16 = |C_2 \times C_2 \times C_4|$, tehát $G \cong C_2 \times C_2 \times C_4$.

b) Mivel $C_3 \times C_8 \cong C_{24}$, egyetlen generátorral is meg lehet adni: $C_{24} \cong \langle x \mid x^{24} = 1\rangle$.

Hf1. *Bizonyítsuk be, hogy G feloldható, ha $|G| = 8p$, és p páratlan prím.*

Hf2. *Bizonyítsuk be, hogy* $\langle x, y \mid y^{-1}xy = x^2,\ x^{-1}yx = y^2\rangle = 1$