1. *Egy $r \in R$ gyűrűelem idempotens, ha $r^2 = r$. Bizonyítsuk be, hogy ha egy gyűrűnek minden eleme idempotens, akkor a gyűrű kommutatív. Hány eleme lehet egy ilyen tulajdonságú véges gyűrűnek? Adjunk meg ilyen végtelen gyűrűt is!*

Megoldás: Legyen $a \in R$ tetszőleges elem. A feltétel szerint $a + a = (a + a)^2 = a^2 + a^2 + a^2 + a^2 = a + a + a + a$, amiből $a + a$-t kivonva azt kapjuk, hogy $a + a = 0$, azaz $a = -a$ minden $a \in R$-re.
Most tetszőleges $x, y \in R$-re $x + y = (x + y)^2 = x^2 + y^2 + xy + yx = x + y + xy + yx \Rightarrow xy + yx = 0 \Rightarrow yx = -xy = xy$ az előbbiek szerint, tehát R valóban kommutatív.
Ha R véges, akkor abból, hogy az $(R, +)$ Abel-csoportban minden elem rendje 2 vagy 1, azt kapjuk a véges Abel-csoportok alaptételének felhasználásával, hogy $(R, +)$ kételemű ciklikus csoportok direkt szorzata, így $|R|$ 2-hatvány, és tetszőleges n-re létezik is ilyen 2^n elemű gyűrű, egy n-elemű halmaz hatványhalmazán értelmezett $(P(H), \cap, \vartriangle)$ Boole-gyűrű. Ha a H halmaz végtelen, akkor ez a Boole-gyűrű olyan végtelen gyűrű, amelyben szintén igaz, hogy minden elem idempotens.

2. *Bizonyítsuk be, hogy ha R egységelemes gyűrű, és $a \in R$ nilpotens (azaz van olyan $n > 0$ egész szám, amellyel $a^n = 0$), akkor $1 + a$ invertálható!*

Megoldás: Ha $a^n = 0$, akkor $(1+a)(1-a+a^2-a^3+\ldots+(-1)^{n-1}a^{n-1}) = 1+(-1)^n a^n = 1$, és a másik sorrendben vett szorzatuk ugyanígy 1, tehát $1 + a$ invertálható, és az inverze $1 - a + a^2 - a^3 + \ldots$.

3. *Bizonyítsuk be, hogy ha $1 \in R$, $a, b \in R$, és $1 + ab$-nek van inverze, akkor $1 + ba$-nak is van!*

Megoldás: Először bizonyítsuk be az állítást arra az esetre, amikor ab nilpotens, mondjuk, $(ab)^n = 0$. Ekkor ba is nilpotens, ugyanis $(ba)^{n+1} = b(ab)^n a = b0a = 0$. Az előző feladat megoldása szerint ekkor ab és ba is invertálható, és az inverzük $c = (1 + ab)^{-1} = 1 - ab + (ab)^2 - (ab)^3 + \ldots$ és $d = (1 + ba)^{-1} = 1 - ba + (ab)^2 - (ba)^3 + \ldots$ (legalább $n+1$ tagot kiírva). Vegyük észre, hogy ebben az esetben $d = 1 - bca$.
Most belátjuk, hogy általánosan is igaz, hogy ha c az $1 + ab$ inverze, akkor $d = 1 - bca$ az $1 + ba$ inverze.
$c(1 + ab) = 1 = (1 + ab)c \Rightarrow cab = 1 - c = abc$. Így
$d(1 + ba) = (1 - bca)(1 + ba) = 1 - bca + ba - bcaba = 1 - bca + ba - b(1 - c)a = 1 - bca + ba - ba + bca = 1$, és
$(1 + ba)d = (1 + ba)(1 - bca) = 1 + ba - bca - babca = 1 + ba - bca - b(1 - c)a = 1 + ba - bca - ba + bca = 1$, tehát $1 + ba$ is invertálható.

4. a) *Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{H}$ tisztán képzetes elemeit $\mathbb{R}^3$ vektorainak tekintve (ahol i, j, k a standard bázis elemei), az $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ vektorok $\mathbb{H}$-beli szorzata $-\mathbf{uv} + \mathbf{u} \times \mathbf{v}$, ahol $\mathbf{uv}$ skalárszorzat, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ pedig vektoriális szorzat.*

b) *Határozzuk meg $\mathbb{H}$ centrumát, azaz a $Z(\mathbb{H}) = \{\, z \in \mathbb{H} \mid zr = rz \ \forall r \in \mathbb{H} \,\}$ részalgebrát. Hány dimenziós altér a nem centrumbeli elemek centralizátora?*

Megoldás: a) $(ai + bj + ck)(a'i + b'j + c'k) =$
$= -(aa' + bb' + cc') + (bc' - cb')i + (ca' - ac')j + (ab' - ba')k == -\mathbf{uv} + \mathbf{u} \times \mathbf{v}$,
ha $\mathbf{u} = (a, b, c)$ és $\mathbf{v} = (a', b', c')$.

b) Az a) rész szerint $\mathbb{H}$ elemei tekinthetők olyan formális összegnek, amelynek első tagja (a kvaternió valós része) skalár, a második egy $\mathbb{R}^3$-beli vektor.

$$(\alpha + \mathbf{u})(\beta + \mathbf{v}) = \alpha\beta + \alpha\mathbf{v} + \mathbf{u}\beta - \mathbf{u}\mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{v}$$
$$(\alpha + \mathbf{u})(\beta + \mathbf{v}) = \beta\alpha + \mathbf{v}\alpha + \beta\mathbf{u} - \mathbf{v}\mathbf{u} + \mathbf{v} \times \mathbf{u}$$

Mivel az 1, és így annak minden skalárszorosa is felcserélhető $\mathbb{H}$ minden más elemével, és a skalárszorzat is kommutatív, a két szorzat első négy tagja ugyanaz, az ötödik pedig pontosan akkor egyenlő, ha $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 0$, azaz ha $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ párhuzamosak. Ebből következik, hogy $Z(\mathbb{H})$ csak az 1 skalárszorosaiból áll, és minden nem centrumbeli elem, $\alpha + \mathbf{u}$ (ahol $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$), centralizátora 2-dimenziós, az 1 és $\mathbf{u}$ által generált altér.

5. *a) Legyen G véges csoport, és $R = KG$ csoportalgebra. Bizonyítsuk be, hogy $I = K(\sum_{g\in G} g)$ ideál R-ben, és $I \leq Z(R)$.*

b) Lássuk be, hogy $G \cong C_3$ és $K = \mathbb{Z}_2$ esetén ennek az ideálnak van komplementer ideálja, azaz olyan $J \triangleleft R$, amelyre $I + J = R$ és $I \cap J = 0$, de $G \cong C_3$ és $K = \mathbb{Z}_3$ esetén nincs.

Megoldás: a) Legyen $z = \sum_{g\in G} g$. Ekkor $zh = \sum_{g\in G} gh = \sum_{g'\in G} g' = z$ minden $h \in G$-re, mivel a Cayley-reprezentáció szerint a h-val való jobbszorzás permutálja G elemeit. Ugyanígy igaz az is, hogy $hz = z$ minden $h \in G$-re. Ebből következik, hogy z (és persze z minden skalárszorosa is) felcserélhető a G minden elemével, és így ezek lineáris kombinációival, azaz KG elemeivel is. Tehát $Kz \leq Z(KG)$. Továbbá Kz nyilván K-altér, és G tetszőleges elemével való bármelyik oldali szorzás, és így a KG elemeivel való szorzás is, önmagába viszi, tehát $Kz \triangleleft KG$.

b) Vegyük észre, hogy ha az I, J ideálokra $I \cap J = 0$, akkor IJ is nulla, ugyanis I-nek és J-nek is része. Tehát először is olyan elemeket keresünk, amelyek nullába szorozzák a $z = 1 + a + a^2$ elemet (ahol $G = \langle a\rangle \cong C_3$). Mivel $zh = z = hz$ minden $h \in G$-re, $x = \sum_{h\in G} \mu_h h$-ra $zx = xz = (\sum_{h\in H} \mu_h)z$, és ez akkor és csak akkor 0, ha $\sum_{h\in H} \mu_h = 0$. Tehát a keresett ideál része az $\{\, \alpha 1 + \beta a + \gamma a^2 \mid \alpha + \beta + \gamma = 0 \,\}$ 2-dimenziós altérnek. Ez az altér ideál is, mert egy csoportelemmel beszorozva valamely elemét, az együtthatók ugyanazok maradnak, csak a csoportelemek cserélődnek ki mellettük. A $K = \mathbb{Z}_2$ esetben Kz diszjunkt ettől az ideáltól, és így a dimenziók miatt $I + J = KG$ is teljesül, ha ezt választjuk J-nek. Viszont a $K = \mathbb{Z}_3$ esetben ez az ideál tartalmazza I-t, tehát ennek semmilyen J részére nem teljesülhet, hogy $I + J = KG$ legyen.

6. *Mit mondhatunk az olyan R gyűrűről, amelyben minden $a \in R$ elemre a $\{\, 0, a \,\}$ halmaz ideálja R-nek?*

Megoldás: Először is $a+a$ csak 0 lehet, tehát a gyűrű additív csoportja $\mathbb{Z}_2$ fölötti vektortér. Másrészt ha $|R| \geq 3$, akkor tetszőleges $a \neq 0$ és $b \neq a$ elemre $ab, ba \in \{\, a, 0 \,\} \cap \{\, b, 0 \,\} = \{\, 0 \,\}$, tehát $ab = ba = 0$. Viszont van $b \in R \setminus \{\, a, 0 \,\}$, és arra $a + b \neq a$, ezért $0 = a(a + b) = aa + ab = aa$ is igaz, így R csak zérógyűrű lehet.
$|R| \leq 2$ esetén a feltétel semmitmondó, $\{\, 0 \,\}$ és R nyilván mindig ideálja R-nek. A zérógyűrűkön kívül ez még a $\mathbb{Z}_2$-t adja.

7. *Adjuk meg a $K[x, y]$ gyűrű (ahol K kommutatív test) x és y^2 által generált ideáljának elemeit. Adjuk meg a faktorgyűrűt az ideál mellékosztályainak egy alkalmas reprezentánsrendszerével. Mik az ideáljai a faktorgyűrűnek?*

Megoldás: Az összes olyan polinom benne van a generált ideálban, amelyben az 1 és az y együtthatója 0, és ezek valóban ideált alkotnak. Így teljes reprezentánsrendszert adnak az $a + by$ $(a, b \in K)$ alakú polinomok. A faktorgyűrű elemein a szorzást az $(a + by)(c + dy) = ac + (bc + ad)y$ szabállyal adhatjuk meg. Ebben tetszőleges $a + by$ polinom, ahol $a \neq 0$, kigenerálja a teljes faktorgyűrűt, ugyanis $(a + by)(\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2}y) = 1$, viszont tetszőleges by $(b \neq 0)$ az összes többi elemből álló (y) ideált generálja. Tehát a faktorgyűrűnek a nyilvánvaló egyelemű és teljes ideálján kívüli egyetlen ideálja az (y).

8. *Bizonyítsuk be, hogy* $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1) \cong \mathbb{C}$. *Határozzuk meg a* $\mathbb{C}[x]/(x^2 + 1)$ *gyűrű összes ideálját!*

Megoldás: Az $x^2 + 1$ által generált I ideál az $x^2 + 1$ többszöröseiből áll, és a hozzá tartozó mellékosztályoknak reprezentánsrendszerét adják a legföljebb elsőfokú polinomok. Ha a faktorgyűrű műveleteit ezeken a reprezentánselemeken adjuk meg, akkor azt kapjuk, hogy
$(a + bx) + (c + dx) = (a + c) + (b + d)x$,
$(a + bx)(c + dx) = ac + (ad + bc)x + bdx^2 \equiv ac + (ad + bc)x - bd = (ac - bd) + (ad + bc)x$.
Ebből következik, hogy a $\varphi : \mathbb{R}[x]/(x^2 + 1) \to \mathbb{C}$, $\varphi : a + bx + I \mapsto a + bi$ leképezés bijektív és művelettartó is, tehát izomorfizmus.
A $\mathbb{C}[x]/(x^2 + 1)$ faktorgyűrű elemei azonosíthatók az $I = (x^2 + 1)$ ideál mellékosztályainak reprezentánsrendszerével, a $\{\, u + vx \mid u, v \in \mathbb{C} \,\}$ halmazzal, ahol az összeadás és a szorzás az $x^2 = -1$ összefüggés figyelembevételével történik. Ebből következik, hogy a faktorgyűrű $\mathbb{C}$ fölött kétdimenziós vektorteret alkot, tehát valódi ideáljai csak egydimenziósak lehetnek. Ha $u^2 + v^2 \neq 0$, akkor $1 = (u + vx)\frac{1}{u^2+v^2}(u - vx)$ benne van az $u + vx$ által generált ideálban, és akkor az csak a teljes faktorgyűrű lehet. Ha $u^2 + v^2 = (u + vi)(u - vi) = 0$, akkor $u = \pm vi \Rightarrow u + vx = v(x \pm i)$, tehát minden valódi ideál tartalmazza $x + i$ és $x - i$ valamelyikét. Ezek közül bármelyiknek a skalárszorosai egydimenziós, és így maximális ideált alkotnak ($(x + i)(u + vx) = (u + vi)x + (ui - v) = (u + vi)(x + i)$ és hasonlóan $(x - i)(u + vx) = (u - vi)x + (-v - ui) = (u - vi)(x - i)$, tehát ezek az alterek valóban ideálok), és így a két triviális ideálon kívül csak ez a két ideálja van a faktorgyűrűnek.

9. *Adjuk meg a* $K[x]/(x^2 + x + 1)$ *faktorgyűrű elemszámát, ha* $K = \mathbb{Z}_2$*, illetve* $\mathbb{Z}_3$*. Ezek közül melyik faktorgyűrű test?*

Megoldás: Az ideál mellékosztályainak reprezentánsrendszerét adják a legföljebb elsőfokú polinomok, így $K = \mathbb{Z}_2$ esetén 4-elemű, $K = \mathbb{Z}_3$ esetén 9-elemű a faktorgyűrű. Az első faktorgyűrű test: itt $(1 + x)x = x + x^2 = x + x + 1 = 1$, így minden nem nulla eleme invertálható. A második viszont még csak nem is nullosztómentes: $\mathbb{Z}_3$ fölött $x^2 + x + 1 = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$, tehát a faktorgyűrűben $(x - 1)^2 = 0$.

Hf1. *Bizonyítsuk be, hogy kommutatív gyűrűben a nilpotens elemek ideált alkotnak!*

Hf2. *Legyen* K *test. Bizonyítsuk be, hogy a* K *fölötti* $n \times n$*-es fölső háromszögmátrixok gyűrűjében ideált alkotnak azok, amelyeknek átlójában csupa* 0 *áll. Bizonyítsuk be, hogy az ehhez az ideálhoz tartozó faktorgyűrű kommutatív.*