1. *Legyen M jobb R-modulus, B balideálja, J jobbideálja R-nek, $a \in M$ és U, V részmodulusok M-ben. Az alábbiak közül melyikek lesznek feltétlenül részmodulusai M-nek? (Az összegek komplexusösszegeket, a szorzatok a komplexusszorzat elemeiből alkotott összegek hamazát jelentik.)*

a) aR *b)* aB *c)* aJ *d)* $U \cap V$ *e)* $U \cup V$
f) $U + V$ *g)* $\mathrm{Ann}_M(B)$ *h)* $\mathrm{Ann}_M(J)$ *i)* UB *j)* UJ.

Megoldás: Részmodulusok: aR, aJ, $U \cap V$, $U + V$, $\mathrm{Ann}_M(B)$, UJ.
Ellenpéldák: Legyen $R = \mathbb{R}^{n\times n}$, és

$$M = R_R, \quad a = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, U = \left\{ \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad V = J = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ * & * \end{bmatrix} \right\}, \quad B = \left\{ \begin{bmatrix} * & 0 \\ * & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Ezekre $aB = \left\{ \begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ nem jobbmodulus, mert $aBa = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \not\subseteq aB$ (a-val mint R elemével szorozva);
$U \cup V$ nem jobbmodulus, mert nem zárt az összegre, pl. $I \in U + V$, de $I \notin U \cup V$;
$\mathrm{Ann}_M(J) = B$ nem jobbmodulus, mert pl. $Ba = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & * \\ 0 & * \end{bmatrix} \right\} \not\subseteq B$;
$UB = \left\{ \begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ nem jobbmodulus, mint korábban láttuk.

2. *Bizonyítsuk be, hogy egy R gyűrű minden nilpotens jobbideálja annullál minden egyszerű jobb R-modulust.*

Megoldás: Legyen J jobbideál R-ben, és tegyük fel, hogy $J^k = 0$ valamely k-ra. Ha $M \neq 0$ egyszerű modulus, azaz nincs valódi részmodulusa, akkor $MJ \leq M$ miatt $MJ = 0$ vagy $MJ = M$. Az első esetben kész vagyunk, a másodikban $M = MJ = MJJ = \ldots = MJ^k = M0 = 0$, ellentmondás.

3. *Mi lehet a $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_3$, illetve $\mathbb{Z}_6$ gyűrűk fölötti modulusok additív csoportja?*

Megoldás: Az összes Abel-csoport egyúttal $\mathbb{Z}$-modulus. $\mathbb{Z}_3$ test, így a modulusai vektorterek. Mivel minden vektortér 1-dimenziós alterek direkt összege, igy a $\mathbb{Z}_3$-modulusok additív csoportja háromelemű ciklikus csoportok direkt összege. Végül ha M modulus $\mathbb{Z}_6$ fölött, akkor M additív csoportjának minden eleme első-, másod-, harmad- vagy hatodrendű. A másodrendűek a 0-val, illetve a harmadrendűek a 0-val részcsoportot alkotnak: M_2 és M_3, amelyekre $M_2 \cap M_3 = 0$. Továbbá minden $m \in M$ egy M_2-beli és egy M_3-beli elem összege: $m = 7m = (3m) + (4m)$, így $M = M_2 \oplus M_3$, ahol az előző eset szerint M_2 másodrendű ciklikus csoportok, M_3 pedig harmadrendű ciklikus csoportok direkt összege.

4. *Legyen $A \leq (\mathbb{Q}, +)$ a p-hatvány nevezőjű törtek részcsoportja, és $\mathbb{Z}_{p^\infty} = A/\mathbb{Z}$ mint $\mathbb{Z}$-modulus. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ minden valódi részmodulusa ciklikus, de $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ nem áll elő ciklikus modulusok direkt összegeként!*

Megoldás: A $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ faktormodulust tekinthetjük úgy, hogy elemei a $[0, 1)$ intervallumbeli, p-hatvány nevezőjű törtek, ahol az összeadás és egésszel való szorzás a törtrész függvény alkalmazásával, azaz az $\{x + y\}$, illetve az $\{xm\}$ szabály szerint történik. Legyen U részmodulus. Ha ez tartalmaz egyszerűsített alakjában p^n nevezőjű $\frac{a}{p^n}$ törtet, akkor $\frac{1}{p^n} \in U$, ugyanis van olyan x, y egész, hogy $ax + p^n y = 1$, így $\frac{1}{p^n} = \{\frac{1}{p^n}\} = \{\frac{a}{p^n}x + y\} =$

$\{\frac{a}{p^n}x\} \in U$, és így minden $0 \le k \le n$-re minden p^k nevezőjű tört U-ban van. Tehát ha a nevezők kitevője tetszőlegesen nagy lehet az U-ban, akkor $U = \mathbb{Z}_{p^\infty}$, ha pedig n a maximális kitevő, akkor U éppen az $\frac{1}{p^n}$ által generált p^n-elemű ciklikus részmodulus. Ebből látható az is, hogy minden nem nulla részmodulus tartalmazza az $\frac{1}{p}$ által generált p-edrendű ciklikus részcsoportot, ezért nincs két diszjunkt nem triviális részmodulus, és így $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ nem állhat elő valódi részmodulusok direkt összegeként.

5. *Modulusok direkt szorzata a teljes Descartes-szorzatuk a komponensenkénti műveletekkel. Igaz-e, hogy féligegyszerű modulusok direkt szorzata is féligegyszerű?*

Megoldás: Általában nem lesz féligegyszerű. Vegyük például az összes prímre a $\mathbb{Z}_p$ prímrendű $\mathbb{Z}$-modulusok direkt szorzatát. A komponensek egyszerűek, tehát féligegyszerűek is, viszont a szorzatban van végtelen rendű elem, például az, amelyiknek minden komponense a megfelelő ciklikus modulus generátoreleme. Ez az elem $\mathbb{Z}$-vel izomorf részmodulust generál, ami pedig nem féligegyszerű, mert nincs is egyszerű részmodulusa. Viszont féligegyszerű modulusnak minden részmodulusa féligegyszerű, így a teljes direkt szorzat sem lehet féligegyszerű.

6. *Melyek egyszerűek, melyek féligegyszerűek a véges Abel-csoportok közül? Milyen n-re féligegyszerű a $\mathbb{Z}_n$ Abel-csoport?*

Megoldás: Csak a prímrendűek egyszerűek az Abel-csoportok közül, így egy Abel-csoport pontosan akkor féligegyszerű, ha prímrendű ciklikusok direkt összege. Ha n kanonikus alakja $p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$, akkor $\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{p_1^{k_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_r^{k_r}}$, és a véges Abel-csoportok kanonikus alakjának egyértelműségéből következik, hogy $\mathbb{Z}_n$ pontosan akkor féligegyszerű, ha $k_i = 1$ minden i-re, azaz ha n négyzetmentes.

7. *Tegyük fel, hogy R féligegyszerű, egységelemes gyűrű. Bizonyítsuk be a Wedderburn–Artin-tétel nélkül, hogy ekkor R_R véges sok egyszerű modulus direkt összege!*

Megoldás: Ha R féligegyszerű, akkor R_R felírható $R_R = \bigoplus_{i\in I} S_i$ alakban, ahol az S_i-k egyszerű modulusok. és így $1 = u_1 + \ldots + u_k$ valamely $u_j \in S_{i_j}$ elemekre (ahol $i_j \in I$ különbözők). De akkor $1 \in \bigoplus_{j=1}^{k} S_{i_j}$, és így $R = 1R \subseteq \bigoplus_{j=1}^{k} S_{i_j} \subseteq R \Rightarrow R = \bigoplus_{j=1}^{k} S_{i_j}$.

8. *Bizonyítsuk be, hogy a következő két állítás ekvivalens tetszőleges $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrixra:*
(i) $\mathbb{C}^n$ minden A-invariáns alterének van A-invariáns direkt kiegészítője;
(ii) A diagonalizálható.

Megoldás: Tekintsük a $\mathbb{C}^n$ vektorteret $K[x]$-modulusnak a $p(x)\mathbf{v} = p(A)\mathbf{v}$ hatással. $V \subseteq \mathbb{C}^n$ pontosan akkor A-invariáns, ha $K[x]$-részmodulus, így az (i) feltétel a $\mathbb{C}^n$ mint $K[x]$-modulus féligegyszerűségének egyik ekvivalens jellemzése. Ezért (i) ekvivalens azzal, hogy $\mathbb{C}^n$ egyszerű $K[x]$-részmodulusok direkt összege. Viszont $\mathbb{C}^n$-ben csak az egydimenziós A-invariáns alterek lesznek egyszerű részmodulusok, ugyanis egy A-invariáns altérben szükségképpen van A-ra nézve sajátvektor (bármely lineáris transzformációnak van sajátértéke, és így sajátvektora is az algebra alaptétele miatt). Tehát (i) akkor és csak akkor teljesül, ha $\mathbb{C}^n$ felbontható 1-dimenziós A-invariáns alterek (azaz sajátvektor által generált alterek) direkt összegére, és ez pont azt jelenti, hogy A diagonalizálható.

9. *Tegyük fel, hogy az R véges gyűrű minden x elemére van olyan $n > 1$, hogy $x^n = x$. Bizonyítsuk be, hogy R kommutatív! (Útmutatás: Használjuk a Wedderburn–Artin-tételt!)*

Megoldás: A gyűrűben nincs nem 0 nilpotens elem, mert ha $x^m = 0$ valamely $m > 1$-re, másrészt a feltevés szerint $x^n = x$ valamely $n > 1$-re, akkor $x = x^{m(n-1)+1} = 0$. Továbbá az R végessége miatt R Artin-gyűrű, tehát a Wedderburn–Artin-tétel szerint R ferdetest fölötti mátrixgyűrűk direkt összege. Ha $m > 1$, akkor egy $m \times m$-es mátrixgyűrűben vannak nilpotens elemek ($E_{1m}^2 = 0$), tehát R 1×1-es mátrixgyűrűk, azaz ferdetestek direkt összege. De a Wedderburn-tétel miatt ezek a véges ferdetestek mind testek, tehát R testek direkt összege, és így kommutatív.

10. *Adjuk meg az összes nemkommutatív 4-elemű gyűrűt izomorfia erejéig! (Mutassuk meg először, hogy az additív csoportja nem lehet ciklikus, és hogy a gyűrűnek van nem nulla nilpotens ideálja.)*

Megoldás: Tegyük fel, hogy R nem kommutatív, 4-elemű gyűrű. Ha $(R, +)$ ciklikus, akkor R minden eleme egyetlen elem egész számszorosa, és ezek felcserélhetők egymással, tehát R kommutatív lenne. Ha R-nek nincs nem nulla nilpotens ideálja, akkor, minthogy véges gyűrű nyilván Artin-féle, a Wedderburn–Artin tétel szerint R ferdetest fölötti mátrixgyűrűk direkt összege, de ha nem 1×1-es a mátrixgyűrű, akkor minimum 16 eleme, ezért R ferdetestek direkt összege, de a Wedderburn-tétel szerint ezek testek, így R kommutatív lenne, ellentétben a feltevéssel.

A maradék esetben $(R, +)$ két másodrendű ciklikus csoport direkt összege. A nem triviális nilpotens ideál additív részcsoport is, ezért vagy 4-, vagy 2-elemű. Az első esetben $R^2 < R$, és ha $R^2 = 0$, akkor R zérógyűrű, így kommuatív volna, ezért $|R^2| = 2$, és $R^2 > R^3$ miatt $R^3 = 0$. Legyen $R \setminus R^2 = \{\, a, b \,\}$ és akkor $R^2 = \{\, a + b,\ 0 \,\}$. De akkor $R^3 = 0$ miatt $a(a + b) = (a + b)a = 0$, amiből $ab = ba$, és így R kommutativitása következik.

Marad az az eset, amikor csak egy I kételemű nilpotens ideál van R-ben. Legyen megint $R \setminus I = \{\, a, b \,\}$, és $I = \{\, a+b,\ 0 \,\}$. De R/I egyszerű, és nem zérógyűrű (ha az lenne, akkor $R^2 \leq I$ miatt R is nilpotens volna), ezért csak a kételemű $\mathbb{Z}_2$ test lehet. Ebből következik, hogy $a^2, b^2, ab, ba \in \{\, a, b \,\}$. Viszont a^2 nem lehet b, mert akkor generálná R-et, és így R kommutatív volna, és ugyanígy nem lehet $b^2 = a$. Vagyis $a^2 = a$, $b^2 = b$, továbbá $ab \neq ba$ a nem-kommutativitás miatt, így vagy $ab = a$ és $ba = b$, vagy $ab = b$ és $ba = a$, és ez már meghatározza a gyűrű műveleteit. Ha így valóban gyűrűt kapunk (azaz ha teljesülnek az axiómák), akkor ez két nem izomorf gyűrű, mert az egyikben a nem nilpotens elemek szorzata mindig a bal oldali, a másikban mindig a jobb oldali tényező.

Ez a két gyűrű valóban létezik:

$$R_1 \cong \left\{ \begin{bmatrix} x & x \\ y & y \end{bmatrix} \;\middle|\; x, y \in \mathbb{Z}_2 \right\}, \qquad R_2 \cong \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ x & y \end{bmatrix} \;\middle|\; x, y \in \mathbb{Z}_2 \right\}.$$

11. *Láttuk, hogy testek multiplikatív csoportjának minden véges részcsoportja ciklikus. Adjunk új bizonyítást erre a tételre a véges Abel-csoportok alaptételének a segítségével!*

Megoldás: Egy test multiplikatív csoportja Abel-csoport, és így ennek egy véges részcsoporja prímhatványrendű ciklikusok direkt szorzata. Ha a direkt komponensek között lenne kettő, amelynek a rendje ugyanannak a p prímnek a hatványa, akkor a testben az $x^p - 1$ polinomnak legalább p^2 darab gyöke lenne, holott testben n-edfokú polinomnak legföljebb n gyöke van. Tehát ennek a véges Abel-csoportnak a ciklikus komponensei páronként relatív prím rendűek, így a csoport ciklikus.