1. *Legyen D azon 2×2-es invertálható valós mátrixok halmaza, amelyeknek csak a főátlójában, M pedig azoké, amelyeknek csak a mellékátlójában van nem nulla elem. Bizonyítsuk be, hogy $D \cup M$ részcsoportja $GL_2(\mathbb{R})$-nek, és D normálosztója ennek a részcsoportnak. (7 pont)*

Megoldás: $D = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$, és $M = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{bmatrix} \,\middle|\, c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$.
Legyen $H = D \cup M$.
$I \in D \subseteq H$, $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{bmatrix} \in H$, $\begin{bmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & d^{-1} \\ c^{-1} & 0 \end{bmatrix} \in H$,
D zárt a szorzásra, $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & ac \\ bd & 0 \end{bmatrix} \in H$, $\begin{bmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & cb \\ da & 0 \end{bmatrix} \in H$,
$\begin{bmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & c' \\ d' & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cd' & 0 \\ 0 & dc' \end{bmatrix} \in H$. Tehát H részcsoport $GL_2(\mathbb{R})$-ben.
Mivel D részcsoport H-ban, a D-beli elemekkel való konjugálásra nyilván zárt, tehát elég az M-beli elemekkel való konjugálást ellenőrizni a $D \lhd H$ állítás bizonyításához.

$$\begin{bmatrix} 0 & d^{-1} \\ c^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & d^{-1}b \\ c^{-1}a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \in D$$

($D \lhd H$ bizonyítása másképp: $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$, így $M = Dt$ mellékosztály, ahol $t = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Tehát a H csoportban D-nek csak két mellékosztálya van, azaz $|H : D| = 2$, amiből $D \lhd H$ következik.)

2. *Hány 4-edrendű elem van a $D_4 \times C_8$ csoportban?* *(7 pont)*

Megoldás: Ha $a \in D_4$ és $b \in C_8$, akkor $o(ab) = [o(a), o(b)]$. A D_4 diédercsoportban egy elsőrendű (az egységelem), öt másodrendű (négy tükrözés és a 180°-os forgatás), és két negyedrendű elem (a 90 és -90 fokos forgatás) van, C_8-ban egy elsőrendű, egy másodrendű, két negyedrendű és négy nyolcadrendű elem van. $o(ab)$ akkor lesz negyedrendű, ha $o(a) = 4$ és $o(b) = 1$, 2 vagy 4, vagy pedig $o(b) = 4$ és $o(a) = 1$ vagy 2 (a $4, 4$ esetet már az előbb számoltuk). Ez összesen $2 \cdot 4 + 6 \cdot 2 = 20$ lehetőség.

3. *Legyen $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, ahol $o(a) = 6$ és $o(b) = 8$. Határozzuk meg az $N = \left\langle a^3 b^2 \right\rangle$ normálosztóra N és G/N elemszámát és G/N-ben $\overline{ab^2}$ rendjét!* *(7 pont)*

Megoldás: $(a^3b^2)^2 = a^6b^4 = b^4$, $(a^3b^2)^3 = a^9b^6 = a^3b^6$, $(a^3b^2)^4 = a^{12}b^8 = 1$, tehát $N = \{1, b^4, a^3b^2, a^3b^6\} \Rightarrow |N| = 4 \Rightarrow |G/N| = \frac{6\cdot 8}{4} = 12$.
$ab^2 \notin N$, $(ab^2)^2 = a^2b^4 \notin N$, $(ab^2)^3 = a^3b^6 \in N$, tehát $\overline{ab^2}$ rendje 3 a G/N faktorcsoportban.

4. *a) Bizonyítsuk be, hogy két konjugáltosztály komplexusszorzata teljes konjugáltosztályok uniója.*
b) Mutassunk példát S_3-ban két olyan nem egyelemű konjugáltosztályra, amelyeknek a komplexusszorzata egyetlen konjugáltosztály,

c) *és S_4-ben két olyan konjugáltosztályra, amelyeknek a komplexusszorzata legalább két nem egyelemű konjugáltosztályt tartalmaz.* *(7 pont)*

Megoldás: a) Legyen $\mathcal{K}_1$ és $\mathcal{K}_2$ két konjugáltosztály G-ben. Azt kell belátni, hogy a $\mathcal{K}_1\mathcal{K}_2$ zárt a konjugálásra nézve. Ha $a \in \mathcal{K}_1$ és $b \in \mathcal{K}_2$, továbbá $g \in G$ tetszőleges, akkor $(ab)^g = a^g b^g \in \mathcal{K}_1\mathcal{K}_2$, mert $a^g \in \mathcal{K}_1$ és $b^g \in \mathcal{K}_2$.

b) Legyen $\mathcal{K}_1$ a transzpozíciók konjugáltosztálya, $\mathcal{K}_2$ pedig a 3-ciklusoké. Ekkor a $\mathcal{K}_1\mathcal{K}_2$ komplexusszorzatban csupa páratlan permutáció van (egy páratlan és egy páros szorzata), és S_3-ban $\mathcal{K}_1$ az egyetlen olyan konjugáltosztály, amelynek páratlan permutációk az elemei, tehát $\mathcal{K}_1\mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_1$.

c) Legyen $\mathcal{K}_1$ a transzpozíciók konjugáltosztálya, $\mathcal{K}_2$ pedig a 3-ciklusoké S_4-ben. Ekkor a $\mathcal{K}_1\mathcal{K}_2$ szorzatban benne van $(12)(123) = (13)$ és $(12)(134) = (1234)$ is, ezért az a) rész miatt $\mathcal{K}_1\mathcal{K}_2$ tartalmazza $\mathcal{K}_1$-et és a 4-ciklusok konjugáltosztályát is.

5. *Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges p prímre egy p^3 rendű nem kommutatív csoport centrumának pontosan p eleme van.* *(7 pont)*

Megoldás: $|Z(G)|$ osztója $|G| = p^3$-nek, tehát csak $1, p, p^2$ vagy p^3 lehet.
1 nem lehet, mert tudjuk, hogy véges p-csoport centruma nem triviális.
p^3 nem lehet, mert akkor G kommutatív lenne.
Ha $|Z(G)| = p^2$, akkor $|G/Z(G)| = p \Rightarrow G/Z(G) \cong C_p$, és tanultuk, hogy ha a centrummal vett faktor ciklikus, akkor a csoport kommutatív (ui. $Z(G)$ és még egy elem kigenerálja a teljes csoportot, és ennek a generátorrendszernek az elemei páronként felcserélhetők egymással), tehát itt is ellentmondásra jutunk.
Így $Z(G)$ rendje csak p lehet.

6. *Tegyük fel, hogy $|G| = 20$, és G-nek van C_4-gyel és C_5-tel izomorf faktorcsoportja is. Bizonyítsuk be, hogy G ciklikus.* *(7 pont)*

Megoldás: A feltétel szerint van olyan $N, M \lhd G$, hogy $G/N \cong C_4$ és $G/M \cong C_5$. Ekkor $|N| = 5$ és $|M| = 4$, így $|M \cap N| \mid (5, 4) = 1$, azaz $M \cap N = 1$, és ebből $|MN| = |M| \cdot |N| = 20$ is következik, ezért $MN = G$. Tehát $G = M \times N$. Viszont $N \cong (M \times N)/M = G/M \cong C_5$ és $M \cong (M \times N)/N = G/N \cong C_4$, tehát $G \cong C_4 \times C_5 \cong C_{20}$ (felhasználva, hogy $(m, n) = 1$ esetén $C_m \times C_n \cong C_{mn}$), vagyis G ciklikus.
Másképpen: $G/N \cong C_4$-ben az elemek fele 4-edrendű, tehát G-ben az elemek fele, azaz 10 elem olyan, amelynek a képe G/N-ben 4-edrendű. Ugyanígy $G/M \cong C_5$-ben az elemek négyötöde ötödrendű, tehát G-ben az elemek négyötöde, azaz 16 elem olyan, amelynek a képe G/M-ben 5-ödrendű. A 20-elemű G-ben a 10-elemű és a 16-elemű részhalmaz szükségképpen metszi egymást, tehát van olyan $g \in G$, amelyre $4 \mid o(g)$ és $5 \mid o(g)$, ezért $20 \mid o(g)$, és így $G = \langle g \rangle$ ciklikus.