Algebra 1 **1. zh** *2018. október 25.*

1. Legyen D azon 2×2-es invertálható valós mátrixok halmaza, amelyeknek csak a főátlójában, M pedig azoké, amelyeknek csak a mellékátlójában van nem nulla elem. Bizonyítsuk be, hogy $D \cup M$ részcsoportja $GL_2(\mathbb{R})$-nek, és D normálosztója ennek a részcsoportnak. (*7 pont*)

2. Hány 4-edrendű elem van a $D_4 \times C_8$ csoportban? (*7 pont*)

3. Legyen $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, ahol $o(a) = 6$ és $o(b) = 8$. Határozzuk meg az $N = \left\langle a^3 b^2 \right\rangle$ normálosztóra N és G/N elemszámát és G/N-ben $\overline{ab^2}$ rendjét! (*7 pont*)

4. a) Bizonyítsuk be, hogy két konjugáltosztály komplexusszorzata teljes konjugáltosztályok uniója.

b) Mutassunk példát S_3-ban két olyan nem egyelemű konjugáltosztályra, amelyeknek a komplexusszorzata egyetlen konjugáltosztály,

c) és S_4-ben két olyan konjugáltosztályra, amelyeknek a komplexusszorzata legalább két nem egyelemű konjugáltosztályt tartalmaz. (*7 pont*)

5. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges p prímre egy p^3 rendű nem kommutatív csoport centrumának pontosan p eleme van. (*7 pont*)

6. Tegyük fel, hogy $|G| = 20$, és G-nek van C_4-gyel és C_5-tel izomorf faktorcsoportja is. Bizonyítsuk be, hogy G ciklikus. (*7 pont*)

Algebra 1 **1. zh** *2018. október 25.*

1. Legyen D azon 2×2-es invertálható valós mátrixok halmaza, amelyeknek csak a főátlójában, M pedig azoké, amelyeknek csak a mellékátlójában van nem nulla elem. Bizonyítsuk be, hogy $D \cup M$ részcsoportja $GL_2(\mathbb{R})$-nek, és D normálosztója ennek a részcsoportnak. (*7 pont*)

2. Hány 4-edrendű elem van a $D_4 \times C_8$ csoportban? (*7 pont*)

3. Legyen $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, ahol $o(a) = 6$ és $o(b) = 8$. Határozzuk meg az $N = \left\langle a^3 b^2 \right\rangle$ normálosztóra N és G/N elemszámát és G/N-ben $\overline{ab^2}$ rendjét! (*7 pont*)

4. a) Bizonyítsuk be, hogy két konjugáltosztály komplexusszorzata teljes konjugáltosztályok uniója.

b) Mutassunk példát S_3-ban két olyan nem egyelemű konjugáltosztályra, amelyeknek a komplexusszorzata egyetlen konjugáltosztály,

c) és S_4-ben két olyan konjugáltosztályra, amelyeknek a komplexusszorzata legalább két nem egyelemű konjugáltosztályt tartalmaz. (*7 pont*)

5. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges p prímre egy p^3 rendű nem kommutatív csoport centrumának pontosan p eleme van. (*7 pont*)

6. Tegyük fel, hogy $|G| = 20$, és G-nek van C_4-gyel és C_5-tel izomorf faktorcsoportja is. Bizonyítsuk be, hogy G ciklikus. (*7 pont*)