Algebra 1 **2. zh** *2018. november 29.*

1. Legyen α az $x^3 - 3x - 1 \in \mathbb{Q}[x]$ polinom egyik gyöke $\mathbb{C}$-ben. Állítsuk elő $\dfrac{1}{\alpha+1}$-et α legföljebb másodfokú polinomjaként!

2. Írjuk fel a 72-elemű Abel-csoportok kanonikus alakját! Hány 12-edrendű elem van az egyes csoportokban?

3. Bizonyítsuk be, hogy ha R gyűrű, és $a \in R$, akkor $S = \{r \in R \mid ar = r\}$ jobbideál. Határozzuk meg ezt az S-et az $R = \mathbb{R}^{2\times 2}$-re és $a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$-ra, és bizonyítsuk be, hogy ebben az esetben S nem ideál.

4. Bizonyítsuk be, hogy ha egy G csoport rendje $3^3 \cdot 13$, akkor G valamelyik Sylow-részcsoportja normálosztó!

5. Melyik test a következő faktorgyűrűk közül? A többi faktorgyűrűről lássuk be, hogy nem nullosztómentes!

a) $\mathbb{Q}[x]/(x^3 - 3x - 1)$ b) $\mathbb{Z}_2[x]/(x^2 + 1)$ c) $\mathbb{Q}[x]/(x^2 + x - 2)$

6. Bizonyítsuk be, hogy ha egy G csoportra és $M, N \triangleleft G$ normálosztókra G/N és G/M is feloldható, akkor $G/(M \cap N)$ is feloldható.

Algebra 1 **2. zh** *2018. november 29.*

1. Legyen α az $x^3 - 3x - 1 \in \mathbb{Q}[x]$ polinom egyik gyöke $\mathbb{C}$-ben. Állítsuk elő $\dfrac{1}{\alpha+1}$-et α legföljebb másodfokú polinomjaként!

2. Írjuk fel a 72-elemű Abel-csoportok kanonikus alakját! Hány 12-edrendű elem van az egyes csoportokban?

3. Bizonyítsuk be, hogy ha R gyűrű, és $a \in R$, akkor $S = \{r \in R \mid ar = r\}$ jobbideál. Határozzuk meg ezt az S-et az $R = \mathbb{R}^{2\times 2}$-re és $a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$-ra, és bizonyítsuk be, hogy ebben az esetben S nem ideál.

4. Bizonyítsuk be, hogy ha egy G csoport rendje $3^3 \cdot 13$, akkor G valamelyik Sylow-részcsoportja normálosztó!

5. Melyik test a következő faktorgyűrűk közül? A többi faktorgyűrűről lássuk be, hogy nem nullosztómentes!

a) $\mathbb{Q}[x]/(x^3 - 3x - 1)$ b) $\mathbb{Z}_2[x]/(x^2 + 1)$ c) $\mathbb{Q}[x]/(x^2 + x - 2)$

6. Bizonyítsuk be, hogy ha egy G csoportra és $M, N \triangleleft G$ normálosztókra G/N és G/M is feloldható, akkor $G/(M \cap N)$ is feloldható.