A feladatsorban R egységelemes gyűrű, a modulusok — ha másképp nem mondjuk — unitér bal R-modulusok. Egy modulust *teljesen reducibilisnek* vagy *féligegyszerűnek* hívunk, ha felírható egyszerű modulusok direkt összegeként.

1. Bizonyítsuk be, hogy ha egy A modulus teljesen reducibilis, akkor minden részmodulusa direkt összeadandó.

2. Tegyük fel, hogy egy A modulus minden részmodulusa direkt összeadandó. Bizonyítsuk be, hogy

a) A minden részmodulusa és faktormodulusa is ilyen tulajdonságú;
b) minden $0 \neq a \in A$-hoz van olyan B részmodulusa A-nak, amelyre $a \notin B$ és A/B egyszerű modulus;
c) A teljesen reducibilis.

3. Bizonyítsuk be, hogy ha R féligegyszerű, akkor minden R-modulus teljesen reducibilis.

4. Bizonyítsuk be, hogy egy R gyűrű minden nilpotens balideálja annullál minden egyszerű R-modulust.

5. Bizonyítsuk be, hogy ha ${}_RR$ teljesen reducibilis, akkor R féligegyszerű.

6. Mutassuk meg, hogy R akkor és csak akkor féligegyszerű, ha minden R-modulus projektív.

7. Jelölje $\mathrm{End}(M)$ az M modulus önmagába menő homomorfizmusainak (= endomorfizmusainak) gyűrűjét, ahol $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ és $(fg)(x) = f(g(x))$ a műveletek.

a) Lássuk be, hogy $\mathrm{End}(M)$ valóban gyűrű.
b) Bizonyítsuk be, hogy $\mathrm{End}(M)$-nek mint önmaga fölötti jobb- (vagy bal-) modulusnak akkor és csak akkor van nem triviális direkt felbontása, ha M-nek van.
c) Lássuk be, hogy $\mathrm{End}({}_RR) \cong R$.

8. Keressünk idempotens elemeket a KG csoportalgebrában, és bontsuk föl az algebrát direkt felbonthatatlan modulusok direkt összegére a következő esetekben:

a) $G = C_2$, $K = GF(2)$; b) $G = C_2$, $K = \mathbb{R}$; c) $G = C_4$, $K = \mathbb{R}$;
d) $G = C_4$, $K = \mathbb{C}$; e) $G = S_3$, $K = GF(2)$.

Mik a részmodulusai a direkt komponenseknek?

Hf1. Bizonyítsuk be, hogy egy P modulus akkor és csak akkor projektív, ha minden $f : M \to P$ szürjektív homomorfizmus esetén $M \cong \mathrm{Ker}\,\varphi \oplus P$.

Hf2. Bizonyítsuk be, hogy a KG csoportalgebra centruma a teljes konjugáltosztály-összegek lineáris kombinációiból áll.

Hf3. Lássuk be, hogy $f \in \mathrm{End}(M)$ akkor és csak akkor idempotens, ha valamely $M = A \oplus B$ felbontásnál f az A-ra való vetítés (azaz $f(a+b) = a$, ha $a \in A$ és $b \in B$).