Egy K testet *perfektnek* nevezünk, ha minden K fölötti irreducibilis polinom szeparábilis.

1. Legyen α az x^3-2 polinom egyik nem valós gyöke. Határozzuk meg α fokát $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ fölött, és határozzuk meg a $\mathbb{Q}(\alpha)\cap\mathbb{R}$ résztestet! Igaz-e, hogy ha $K\leq L\leq M$, és $\alpha\in M$, akkor α L fölötti foka osztója α L fölötti fokának?

2. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{Q}$ egyetlen véges bővítése sem lehet algebrailag zárt.

3. Mutassuk meg, hogy minden másodfokú bővítés normális.

4. Igaz-e, hogy normális bővítés normális bővítése normális az eredeti test fölött?

5. Legyen $L|K$ egy testbővítés, M és N pedig olyan közbülső testek, amelyekre az $M|K$ és $N|K$ bővítések normálisak. Legyen S az L-nek az M és N által generált résztestee és $T=M\cap N$. Bizonyítsuk be, hogy az $S|K$ és $T|K$ bővítések mindegyike normális.

6. Mutassuk meg, hogy ha p prím, akkor $x^{p^n}-x$ az összes olyan $\mathbb{F}_p$ fölött irreducibilis polinom szorzata, amelynek foka n-nek osztója.

7. Bizonyítsuk be, hogy perfekt test minden véges bővítése is perfekt.

8. Legyen K egy tetszőleges test és f egy K fölött irreducibilis polinom. Bizonyítsuk be, hogy f minden gyökének ugyanannyi a multiplicitása.

9. Legyen $K(x)$ a K test egyszerű transzcendens bővítése és F ennek az a résztestee, amely a $\sigma: x\mapsto 1-x$ és $\tau: x\mapsto 1/x$ automorfizmusok által fixen hagyott összes $K(x)$-beli elemből áll. Bizonyítsuk be, hogy a $K(x)|F$ bővítés foka 6. Mutassuk meg, hogy $(x^2-x+1)^3/(x^2-x)^2$ eleme F-nek, és ennek alapján keressük meg x kanonikus polinomját F fölött.

10. Legyen K egy test. Mutassuk meg, hogy azok az elemek, amelyeket K minden automorfizmusa fixen hagy, K-nak egy perfekt résztestét alkotják.

11. Legyen K tetszőleges test, $K(t)$ pedig K-nak egy egyszerű transzcendens bővítése. Legyen $K<M\leq K(t)$. Bizonyítsuk be, hogy $K(t)$ algebrai bővítése M-nek.

12. Nevezzünk egy $f(x)=0$ egyenletet ($f(x)\in K[x]$) *normális*nak K felett, ha f egy alkalmas gyökét adjungálva K-hoz már f felbontási testét kapjuk. Bizonyítsuk be, hogy $x^3-3x-1=0$ normális egyenlet $\mathbb{Q}$ felett.

Hf1. Keressük meg $\sqrt{2}+\sqrt[4]{8}$ minimálpolinomját $\mathbb{Q}$ fölött.

Hf2. Határozzuk meg x^4+1 felbontási testének fokát $\mathbb{Q}$, $\mathbb{F}_2$ és $\mathbb{F}_7$ fölött.

Hf3. Bizonyítsuk be, hogy ha a és b valós, akkor $a+bi$ pontosan akkor algebrai, ha a és b algebrai.