

1. Számítsuk ki az $\mathbf{a} = (1, i, 1 + i)$ és $\mathbf{b} = (1 - i, i, 1 + i)$ vektorok skaláris szorzatát és távolságát!
2. Ortogonalizáljuk a \mathbb{C}^3 -beli $\{(i, 0, 1), (1, i, 1 + i)\}$ vektorrendszert, és egészítsük ki \mathbb{C}^3 ortogonális bázisává! Tegyük ortonormálttá ezt a bázist!
3. Legyen $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{x} + i\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ vektor pontosan akkor merőleges a konjugáltjára, ha \mathbf{x} és \mathbf{y} a valós euklideszi térben azonos hosszúságú, egymásra merőleges vektorok!
4. Döntsük el az alábbi mátrixok mindegyikéről, hogy önadjungált, ferdén önadjungált, unitér, illetve normális-e?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

5. Bizonyítsuk be, hogy egy A $n \times n$ -es valós (illetve komplex) mátrix pontosan akkor szimmetrikus (önadjungált), ha minden $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ (illetve $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$) vektorra $\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, A\mathbf{y} \rangle$.
6. Adjuk meg az

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix Schur-felbontását!

7. Az $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ mátrix önadjungált és unitér (így persze normális is). Keressünk egy olyan B mátrixot, amely hasonló A -hoz, és még csak nem is normális!

Házi feladatok

Beadási határidő: március 16.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni. Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

- Számítsuk ki az alábbi két vektor skaláris szorzatát és távolságát!
 - $(1 + i, i, -1), (1 + i, -i, -1)$
 - $(1 - i, i, -2, 1 + i), (1 + i, 0, 2, 1 - i)$.
- Végezzünk Gram-Schmidt-ortogonalizálást a \mathbb{C}^3 -beli $(i, 1, i), (i, 1, 0), (i, 0, 0)$ vektorokon! Adjuk meg a kapott ortogonális bázishoz tartozó ortonormált bázist is!
- Bizonyítsuk be, hogy valós euklideszi terekben igaz a Pitagorasz-tétel megfordítása, azaz, hogy $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2$ esetén \mathbf{u} merőleges \mathbf{v} -re, de komplex euklideszi terekben nem! Adjunk ellenpéldát!
- Milyen feltételek mellett unitér, öndajungált, ferdén öndajungált, illetve normális az

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & bi & 0 \\ 0 & a & 0 & ci \\ ci & 0 & a & 0 \\ 0 & bi & 0 & a \end{bmatrix} \quad \text{mátrix, ahol } a, b, c \in \mathbb{R}?$$

- Adjuk meg az $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ mátrix Schur-felbontását!
- Tegyük fel, hogy az $N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix normális, az A mátrixot pedig úgy kaptuk N -ből, hogy az i . sorát, majd az i . oszlopát megszoroztuk -1 -gyel (tehát az ii indexű eleme nem változott). Bizonyítsuk be, hogy A is normális! (Útmutatás: hogyan kaphatjuk meg N -et A -ból mátrixszorzással?)
- *. Definiáljuk \mathbb{Z}_2^n -en egy vektor hosszát a benne szereplő 1-ek számaként. Bizonyítsuk be, hogy ez a hosszúság is kielégíti a háromszög-egyenlőtlenséget, azaz $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$. Mi a feltétele az egyenlőségnek, és hány olyan vektorpár van, amelyekre a háromszög-egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül?