1. Van-e az A mátrixnak 1-dimenziós, illetve 2-dimenziós invariáns altere $\mathbb{R}^4$-ben?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Bizonyítsuk be, hogy ha $A, B \in K^{n\times n}$-re $AB = BA$, akkor A minden sajátaltere B-invariáns.

3. Bizonyítsuk be, hogy egy $A = \operatorname{diag}(B_1, \ldots, B_k)$ blokkdiagonális mátrix karakterisztikus polinomja a B_i mátrixok karakterisztikus polinomjának szorzata, minimálpolinomja pedig a B_i mátrixok minimálpolinomjának legkisebb közös többszöröse.

4. Mi lehet a Jordan-féle normálalakja annak a komplex mátrixnak, amelynek a

a) karakterisztikus polinomja $(x-1)^6$, minimálpolinomja $(x-1)^4$, az 1-hez tartozó V_1 sajátaltér dimenziója 2;

b) karakterisztikus polinomja $-(x-\lambda)^7$, minimálpolinomja $(x-\lambda)^3$, $\dim(V_\lambda) = 3$, ahol V_λ a λ sajátértékhez tartozó sajátaltér?

5. Mi az alábbi mátrixok Jordan-féle normálalakja?

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

6. Hasonlóság erejéig hány olyan komplex mátrix van, melynek

a) karakterisztikus polinomja $-(x-1)^3(x-3)^4$;

b) minimálpolinomja $(x+2)^6$, és sajátaltere 2-dimenziós?

7. Mutassuk meg, hogy ha két 3×3-as vagy 2×2-es komplex mátrix karakterisztikus polinomja és minimálpolinomja megegyezik, akkor a két mátrix hasonló.

8. Mi lehet az A^2 mátrix minimálpolinomja, ha $A \in M_n[\mathbb{C}]$ minimálpolinomja $(x+1)^2$?

Házi feladatok

Beadási határidő: április 20.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni. Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi valós A mátrixnak nincs 1-dimenziós invariáns altere, viszont $\mathrm{span}((1,1,1,1),(1,-1,0,3))$ invariáns altér.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -3 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Bizonyítsuk be, hogy ha $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, és $U \leq \mathbb{R}^n$ az A-nak invariáns altere, akkor $U^\perp$ az A^T-nak invariáns altere.

3. Mi az alábbi mátrixok Jordan-féle normálalakja, és mi a minimálpolinomjuk?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

4. Mi lehet a Jordan-féle normálalakja annak a komplex mátrixnak, melynek

a) karakterisztikus polinomja $-(x-2)^7$, minimálpolinomja $(x-2)^4$, a 2-höz tartozó V_2 sajátaltér dimenziója 2;

b) karakterisztikus polinomja $(x-\lambda)^8$, minimálpolinomja $(x-\lambda)^4$, $\dim(V_\lambda) = 3$, ahol V_λ a λ sajátértékhez tartozó sajátaltér?

5. Legyen A egy 5×5-ös, 2 sajátértékű, B pedig egy 5×5-ös, 0 sajátértékű Jordan-blokk. Mi az A^2 és a B^2 mátrix Jordan-normálalakja?

6. Hasonlóság erejéig hány olyan komplex mátrix van, melynek

a) karakterisztikus polinomja $-(x-2)^5(x+3)^2$;

b) minimálpolinomja $(x-1)^5$, és sajátaltere 2-dimenziós?

7*. Legyen $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, és tegyük fel, hogy a $C = AB - BA$ mátrix rangja 1. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $C^2 = 0$.