1. a) Bizonyítsuk be, hogy ha egy $2n \times 2n$-es valós A mátrix felbontható úgy 2×2-es blokkokra, hogy a diagonális blokkok mindegyike ugyanaz az $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ mátrix ($b \neq 0$), az átló fölött végig $I_{2\times 2}$ egységmátrixok állnak, mindenhol máshol pedig 0, akkor A Jordan-normálalakja $\mathbb{C}$ fölött két konjugált $n \times n$-es Jordan-blokkból áll, az egyik a $\lambda = a + bi$ a másik a $\bar{\lambda} = a - bi$ sajátértékhez.

b) Lássuk be az a) rész alapján, hogy egy $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix akkor és csak akkor hasonló egy valós mátrixhoz, ha Jordan-normálalakjában a nem valós blokkok konjugált párokba oszthatók.

2. Mutassuk meg, hogy $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ akkor és csak akkor hasonló egy valós mátrixhoz, ha A hasonló $\bar{A}$-hoz.

3. Bizonyítsuk be, hogy egy A mátrix akkor és csak akkor cserélhető fel egy nilpotens N Jordan-blokkal, ha A polinomja N-nek, azaz A felső háromszögmátrix, amelynek a főátló irányú egyenesein azonos elemek állnak.

4. Határozzuk meg az alábbi A mátrix Jordan-normálalakját és Jordan-bázisát, majd ennek a segítségével számítsuk ki az A^n hatványokat!

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Hermite-interpolációval számítsuk ki az $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ mátrixra az e^{2A} értékét!

6. Adjuk meg az alábbi A mátrix négyzetgyökét Hermite-interpoláció segítségével!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

7. Általánosítható-e az Hermite-interpolációra Lagrange interpolációs módszere az alappolinomok megkonstruálásával, illetve Newton módszere, amelyben a feltételek egyenkénti hozzáadásával módosítjuk az előző lépésekben legyártott polinomot?

8. Hány olyan páronként nem hasonló, nem diagonalizálható 3×3-as komplex mátrix van, amelynek determinánsa 0, és a nyoma 1?

9. Adjunk meg az alábbi A és B mátrixokhoz olyan P invertálható mátrixot, amellyel $P^{-1}AP = B$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Házi feladatok

Beadási határidő: május 4.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni. Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

Az $1-4$. feladatban legyen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. Határozzuk meg az A mátrix Jordan-féle normálalakját és egy Jordan-bázisát!

2. Állítsuk elő az A mátrix n. hatványát pozitív egész n-ekre!

3. Határozzuk meg e^J és $\sqrt{J}$ értékét, ahol J az A mátrix Jordan-féle normálalakja!

4. Határozzuk meg e^{3A} értékét!

5. Keressük meg azt a $p(x)$ Hermite-féle interpolációs polinomot, melyre $e^B = p(B)$ a következő mátrixra, és számítsuk ki ebből az e^B értékét!

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6. Hány olyan páronként nem hasonló, nem diagonalizálható 4×4-es komplex mátrix van, amelynek determinánsa 0, nyoma 1, és egyik sajátértéke a 2? Adjuk meg a mátrixok Jordan-féle normálalakját!

7*. Bizonyítsuk be, hogy pontosan akkor igaz, hogy egy $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrixszal csak a polinomjai cserélhetők fel, ha a mátrix minimálpolinomja n-edfokú! (A 3. gyakorló feladat állítását fel lehet használni bizonyítás nélkül.)