1. Ábrázoljuk a $\left\{P \;\middle|\; |d(P,F_2) - d(P,F_1)| = 1\right\}$ "hiperbolát", ha $F_1 = (1,0)$, $F_2 = (-1,0)$, és d az 1-norma, illetve a ∞-norma által indukált metrika $\mathbb{R}^2$-en.

2. a) Bizonyítsuk be, hogy ha P egy pont a síkon, és e egy egyenes, akkor $\mathbb{R}^2$ minden normája szerint van e-nek P-hez legközelebbi pontja (ennek a P-től való távolsága az e egyenes távolsága P-től).
b) Lássuk be, hogy a tengelyekkel párhuzamos egyenesektől való távolság minden p-normára megegyezik az euklideszi távolsággal
c) Határozzuk meg a $P(1,1)$ pont távolságát az $e: \;\; y = 2x$ egyenestől az 1-, 2- és ∞-norma szerint. Melyik az e egyenes P-hez legközelebbi pontja ezekre a normákra nézve?

3. Határozzuk meg az alábbi mátrixok Frobenius-normáját, 1-, 2- és ∞-normáját és spektrálsugarát!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Mutassuk meg, hogy egy $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix spektrálsugara legföljebb akkora, mint bármely mátrixnorma szerinti normája, képlettel:

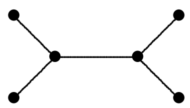
$$\rho(A) \leq \|A\|,$$

speciálisan legföljebb akkora, mint a 2-normája!

5. Mutassuk meg, hogy ha A normális mátrix, akkor a 2-normája egyenlő a spektrálsugarával!

6. Adjuk meg az $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix legjobb 1 rangú közelítését a Frobenius-, 2-, 1- és ∞-norma szerint! (Az első kettőnél használjuk az Eckart–Young-tételt!.)

7. Bizonyítsuk be, hogy egy d-reguláris egyszerű irányítatlan gráf szomszédsági mátrixának spektrálsugara és 1-, 2 és ∞-normája is d.

8. Mi a spektruma az alábbi gráfoknak? Az a) és b) feladatbeli gráfra keressük meg a sajátvektorokat is!
a) 3, illetve 4 szögpontú teljes gráf
b) 4 hosszú kör
c) 

Házi feladatok

Beadási határidő: május 11.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni. Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Ábrázoljuk $\mathbb{R}^2$-ben a $(0,1)$ fókuszú és $y=-1$ vezéregyenesű "parabolát" az összeg-, illetve a maximummetrikára nézve (azaz adjuk meg azoknak a pontoknak a mértani helyét, amelyek az adott metrika szerint egyenlő távolságra vannak a fókuszponttól és a vezéregyenestől)!

2. Adjunk meg $\mathbb{R}^n$-ben
a) $2n$ pontot, amelyek az összegmetrikára és
b) 2^n pontot, amelyek a maximummetrikára nézve páronként egyenlő távolságra vannak egymástól.

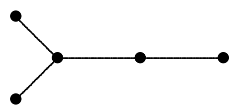
3. Tekintsük az alábbi mátrixokat:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Határozzuk meg a Frobenius-, 1-, 2- és ∞-normájukat és a spektrálsugarukat!

4. Bizonyítsuk be, hogy ha $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitér, akkor $\|A\|_2 = 1$, $\|A\|_F = \sqrt{n}$, továbbá $\|A_1\|$ és $\|A\|_\infty$ mindegyike az $[1, \sqrt{n}]$ intervallumba esik.

5. Határozzuk meg az n ágú irányítatlan csillaggráf szomszédsági mátrixának spektrálsugarát és 1-, 2-, illetve ∞-normáját!

6. Határozzuk meg a  gráf spektrumát!

7*. Bizonyítsuk be, hogy a maximummetrikára nézve $\mathbb{R}^n$-ben legföljebb 2^n olyan pont van, amelyeknek a páronkénti távolsága egyenlő!