1. *Keressük meg azt a mátrixot, mely a definíció alapján igazolja, hogy az alábbi két mátrix kongruens:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Megoldás: A mátrix sajátértékei ± 3 és 0, így könnyen lehet ortogonálisan diagonalizálni (a különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok merőlegesek). Továbbá ebből tudhatjuk azt is, hogy a mátrix valóban kongruens a $D_0 = \operatorname{diag}(1,0,-1)$ mátrixszal. A $3, 0, -3$ sajátértékekhez a sajátvektorok rendre $(2,2,1)$, $(-2,1,2)$ és $(1,-2,2)$. Tehát

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2\sqrt{3} & -2 & \sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 1 & -2\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2 & 2\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ -2 & 1 & 2 \\ \sqrt{3} & -2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \end{bmatrix} \Rightarrow C = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ -2 & 1 & 2 \\ \sqrt{3} & -2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

invertálható mátrixszal $A = C^T D_0 C$.

De szimultán sor-oszlopműveletekkel is diagonalizálhatunk (a Sylvester-tétel szerint abban a diag. alakban is egy pozitív, egy 0 és egy negatív diag. elem lesz valamilyen sorrendben), és aztán azt módosítjuk, hogy a D_0 mátrixot kapjuk.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{s}{\mapsto} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{o}{\mapsto} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \mapsto$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right] \Rightarrow C^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixra $C^T A C = \operatorname{diag}(1,-4,0)$. Ezt megkaphatjuk a $\operatorname{diag}(1,0,-4)$ mátrixból a második és harmadik báziselemet megcserélő P permutációmátrixszal való konjugálással, majd azt szétbontjuk $D_1 D_0 D_1 = \operatorname{diag}(1,1,2)\operatorname{diag}(1,0,-1)\operatorname{diag}(1,1,2)$-re. Tehát $C^T A C = P^T \operatorname{diag}(1,0,-4) P = P^T D_1 D_0 D_1 P$, és így a

$$C' = C P^{-1} D_1^{-1} = C P^T D_1^{-1} = C \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \operatorname{diag}\left(1, 1, \frac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrixszal $(C')^T A C' = D_0$.

2. *Milyen feltétel mellett lesz az alábbi valós mátrix pozitív, illetve negatív definit? Milyen jellege lehet még a mátrixnak más a értékekre?*

$$A = \begin{bmatrix} a & 2 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

Megoldás: A főminorjai rendre a, $a^2 - 4$, $a(a^2-4)$. Ezek akkor mind pozitívak, ha $a > 2$, tehát ekkor lesz A pozitív definit, és akkor $-, +, -$ előjelűek, ha $a < -2$, tehát A pontosan ekkor negatív definit. Ahhoz, hogy valamilyen szemidefinit, de ne definit legyen, az A mátrixnak szingulárisnak kell lennie, azaz $|A| = (a^2-4)a = 0$, és ez csak $a = 0, 2, -2$ esetén teljesül. Könnyen látható, hogy

$a = 0$ esetén a mátrix indefinit: a $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ bal fölső sarokmátrix sajátértékei ± 2, tehát az indefinit, és így A is. Ha $a = 2$, akkor szimultán sor-oszlopműveletekkel $A \cong \mathrm{diag}(2, 0, 2)$, ha pedig $a = -2$, akkor $A \cong \mathrm{diag}(-2, 0, -2)$.
Összefoglalva: A negatív definit, ha $a < -2$, negatív szemidefinit (de nem definit), ha $a = -2$, pozitív szemidefinit (de nem definit), ha $a = 2$, pozitív definit, ha $a > 2$, és a maradék esetekben, tehát $-2 < a < 2$ esetén, indefinit.

3. *Határozzuk meg az alábbi A mátrix pozitív (szemi)definit négyzetgyökét.*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Megoldás: $k_A(x) = -x^3 + 18x^2 - 81x = -x(x-9)^2$, így a sajátértékei $9, 9, 0$. A 0-hoz tartozó egységnyi sajátvektor $\frac{1}{3}(2, -2, 1)$. V_9 ennek a merőleges kiegészítője, annak egy lehetséges ortonormált bázisa $\{\, \frac{1}{3}(2, 1, -2), \frac{1}{3}(1, 2, 2) \,\}$. Tehát a

$$P = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

ortogonális mátrixszal $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(0, 9, 9) = D$, azaz $A = PDP^{-1}$, és ebből A egy négyzetgyöke $P\sqrt{D}P^{-1} = P\sqrt{D}P^T =$

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{bmatrix},$$

amely szintén pozitív szemidefinit, mert egy pozitív szemidefinit diagonális mátrix ortogonálissal való konjugáltja.

4. *Határozzuk meg a $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$ valós bilineáris függvényre nézve a $W = \mathrm{span}((1, 1, 0), (0, 2, 1))$ altér jobb és bal oldali merőlegesét, ha*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás: Legyen

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a W báziselemeiből mint oszlopokból álló mátrix. Ekkor
$W^\perp = \{\, \mathbf{x} \mid \langle \mathbf{w}, \mathbf{x} \rangle = 0 \ \forall \mathbf{w} \in W \,\} = \{\, \mathbf{x} \mid B^T A \mathbf{x} = \mathbf{0} \,\} = \mathcal{N}(B^T A)$.

$$B^T A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \mapsto\mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = t \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

tehát $W^\perp = \mathrm{span}((-2, -1, 1))$,
és ${}^\perp W = \{\, \mathbf{x} \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{w} \rangle = 0 \ \forall \mathbf{w} \in W \,\} = \{\, \mathbf{x} \mid \mathbf{x}^T A B = \mathbf{0}^T \,\} = \mathcal{N}(B^T A^T)$

$$B^T A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \mapsto\mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = t \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

tehát ${}^\perp W = \mathrm{span}((4, 1, -2))$.

5. *Legyen egy f komplex skaláris szorzás Gram–mátrixa* $\begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix}$ *az* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ *standard bázisban. Számítsuk ki* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ *hosszát és skaláris szorzatát a* $(\mathbb{C}^2, f)$ *euklideszi térben. Adjunk meg egy f-re ortonormált bázist* $\mathbb{C}^2$*-ben! Legyen* $\mathbf{b}_1 = (1, i), \mathbf{b}_2 = (1, -1)$ *új bázis Adjuk meg f Gram-mátrixát ebben az új bázisban.*

Megoldás: A standard bázis elemeinek skalárszorzatát egyszerűen leolvashatjuk a Gram-mátrixból: $\mathbf{e}_i^* \mathbf{A} \mathbf{e}_j = a_{ij}$. Tehát $\|\mathbf{e}_1\| = \sqrt{f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)} = \sqrt{2}$, $\|\mathbf{e}_2\| = \sqrt{2}$, és $f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = i$. Az f-ortogonalizáláshoz a második bázisvektort kell ortogonalizálni az elsőre.

$$\mathbf{c}_2' := \mathbf{e}_2 - \frac{f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)}{f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)} \mathbf{e}_1 = (0, 1) - \frac{i}{2}(1, 0) = \left(-\frac{i}{2}, 1\right) \;\Rightarrow\; \mathbf{c}_2 = (-i, 2).$$

Tehát $\{ \mathbf{e}_1, \mathbf{c}_2 \}$ f-ortogonális vektorrendszer, és $\mathbf{e}_1$ f-normája $\sqrt{2}$, míg

$$f(\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_2) = \begin{bmatrix} i & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i \\ 2 \end{bmatrix} = 6,$$

ezért $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0),\ \frac{1}{\sqrt{6}}(-i, 2) \right\}$ f-ortonormált bázis.

Végül az új bázisra való áttérés $\mathbf{P}$ mátrixa és az új bázisbeli Gram-mátrix:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -1 \end{bmatrix}, \qquad [f]_{\mathcal{B}} = \mathbf{P}^* [f]_{\mathcal{E}} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 4 \end{bmatrix}.$$

6. *Legyen* $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^* A \mathbf{y}$ *az alábbi A mátrixszal.*

a) Számítsuk ki a $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *értékét* $\mathbf{x} = (1, i, 0)$, $\mathbf{y} = (2 - i, 1, 1)$*-re.*

b) Adjuk meg a φ által definiált kvadratikus alakot.

c) Diagonalizáljuk az A mátrixot mint Gram-mátrixot, és adjunk φ-ortogonális bázist $\mathbb{C}^3$*-ben.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 2 & 1 \\ 1-i & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Megoldás: a)

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^* A \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 2 & 1 \\ 1-i & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2-i \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 - i$$

b) $q(\mathbf{x}) = |x_1|^2 + 2|x_2|^2 + 3|x_3|^2 + i\bar{x}_1 x_2 - i\bar{x}_2 x_1 + (1+i)\bar{x}_1 x_3 + (1-i)\bar{x}_3 x_1 + \bar{x}_2 x_3 + \bar{x}_3 x_2$

c) Szimultán sor-oszlopműveletekkel diagonalizáljunk, egyúttal az egységmátrixra is alkalmazva a sorműveleteket, így az utóbbiból kapott mátrix adjungáltjának oszlopai (azaz a mátrix sorainak konjugáltjai) adják a diagonális alakhoz tartozó bázist. Arra kell figyelni, hogy ha a sorművelet $s_i \mapsto s_i + c s_j$, akkor az oszlopművelet $o_i \mapsto \bar{c} o_j$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & i & 1+i & 1 & 0 & 0 \\ -i & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1-i & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{s_3-(1-i)s_1}{\overset{s_2+is_1}{\longmapsto}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & i & 1+i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i & i & 1 & 0 \\ 0 & -i & 1 & -1+i & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{o_3-(1+i)o_1}{\overset{o_2-io_1}{\longmapsto}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i & i & 1 & 0 \\ 0 & -i & 1 & -1+i & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{s_3+is_2}{\longmapsto} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2+i & i & 1 \end{array}\right] \overset{o_3-io_2}{\longmapsto}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2+i & i & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \text{A diagonális alak: } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

és a hozzá tartozó bázis $\{(1, 0, 0),\ (-i, 1, 0),\ (-2 - i, -i, 1)\}$.

7. *Bizonyítsuk be, hogy minden indefinit hermitikus bilineáris függvényre nézve van olyan nem nulla vektor, amely merőleges önmagára!*

Megoldás: Ha az f bilineáris függvény indefinit, akkor van olyan f-ortogonális bázis, amelynek elemein az f-hez tartozó kvadratikus alak pozitív és negatív értéket is fölvesz. Legyen $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ ez a két báziselem. Ekkor $f(\mathbf{b},\mathbf{b}) = s^2$, $f(\mathbf{c},\mathbf{c}) = -t^2$, és $f(\mathbf{b},\mathbf{c}) = f(\mathbf{c},\mathbf{b}) = 0$, ahol s, t valós számok. Az $\mathbf{u} = t\mathbf{b} + s\mathbf{c}$ vektor nem nulla, mert különben $\mathbf{c} = -\frac{t}{s}\mathbf{b}$-re $f(\mathbf{c},\mathbf{c}) = \frac{t^2}{s^2} f(\mathbf{b},\mathbf{b}) > 0$ lenne, és $f(\mathbf{u},\mathbf{u}) = t^2 f(\mathbf{b},\mathbf{b}) + s^2 f(\mathbf{c},\mathbf{c}) - st f(\mathbf{b},\mathbf{c}) - st f(\mathbf{c},\mathbf{b}) = t^2s^2 - s^2t^2 = 0$.

Házi feladatok

Beadási határidő: április 6.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni. Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. *Írjuk fel az* $A = \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$ *mátrixot két lényegesen különböző módon* $C^T C$ *alakban (azaz a két felbontás* C *mátrixa ne legyen egymás negatívja)!*

2. *Adjuk meg az alábbi mátrix Cholesky-felbontását!*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

3. *Egy* $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$*-en értelmezett komplex bilineáris függvény* $g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = i\bar{u}_1 v_2 - i\bar{u}_2 v_1$.
a) Írjuk fel a mátrixát!
b) Hermite-féle-e a bilineáris függvény?
c) Határozzuk meg a jellegét!

4. *Adjunk meg egy olyan bázist, amelyben az előző feladatbeli* g *mátrixa diagonális! Írjuk fel a kvadratikus alakot ebben a bázisban!*

5. *Legyen* $a, b \in \mathbb{R}$, *és tekintsük a*

$$\varphi(p, q) = p(a)q(b) + q(a)p(b)$$

bilineáris függvényt a legfeljebb elsőfokú valós polinomok terén. Írjuk fel a φ *mátrixát a standard* $\{1, x\}$ *bázisban! Az* a *és* b *értékétől függően mi a jellege a* φ*-hez tartozó kvadratikus alaknak?*

6. *Határozzuk meg* $\mathbb{R}^3$*-ben az* $(1, -1, 1)$ *vektor által generált altér bal, illetve jobb oldali merőlegesét a* $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$ *bilineáris függvényre nézve, ha*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

7*. *Melyek azok a* φ *valós szimmetrikus bilineáris függvények, amelyekre bármely* $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ *vektor eleme egy* φ*-ortogonális bázisnak?*