1. *Határozzuk meg az alábbi mátrixok redukált SVD-felbontását!*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás: a) Mivel az A mátrix önadjungált (elég, hogy normális), tartozik hozzá ortonormált sajátbázis, sőt ezt vehetjük úgy, hogy a megfelelő sajátértékek abszolút értékei csökkenőek legyenek: -2-höz $(0,1)$, 1-hez $(1,0)$ tartozik. Így a $V = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrixszal

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A diagonális mátrixban módosíthatjuk az előjeleket egy unitér mátrixszal való szorzással.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ebben a felbontásban a két szélső mátrix unitér, a középső pedig nemnegatív diagonális, amelyben a diagonális elemek fogyó sorrendben vannak, ezért ezek a diagonális elemek csak a szinguláris értékek lehetnek, és a felbontás a teljes SVD-felbontás. A redukált ugyanez, mert a mátrix teljes rangú négyzetes mátrix.

b) Itt is alkalmazhatunk egyszerűsített módszert, mivel a mátrix rangja 1. Ekkor $\mathcal{O}(V_1) = \mathcal{O}(B^*B) = \mathcal{O}(B^*) = \overline{\mathcal{S}(B)} = \langle(1,1)\rangle$, tehát $V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, és a $BV_1 = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ szorzatból $U_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ és $\Sigma_1 = [\,2\,]$. Tehát a redukált SVD-felbontás

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot [\,2\,] \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} [\,1 \quad 1\,].$$

c) Érdemes a mátrix transzponáltjára kiszámítani a felbontást, mert akkor kisebb mátrixra (csak 2×2-esre a 3×3-as helyett) kell sajátvektorokat keresni, és aztán a felbontást megtranszponálni.

$$C^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad CC^* = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}, \quad k_{CC^*}(x) = x^2 - 10x + 9, \quad \lambda_1 = 9,\ \lambda_2 = 1$$

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C^*V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A C^*V_1 oszlopait a megfelelő szinguláris értékekkel ($\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = 3$, $\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = 1$) leosztva megkapjuk a U_1 mátrixot:

$$C^* = U_1 \Sigma_1 V_1^* = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Így az eredeti mátrix redukált SVD-felbontása:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

2. *Írjuk fel az 1. feladatbeli B és C mátrixok teljes SVD-felbontását és a C mátrix SVD-felbontásának diadikus alakját!*

Megoldás: A B teljes SVD-felbontásához tetszőlegesen kiegészítjük a redukált felbontásbeli szemiortogonális mátrixokat ortogonálissá, és a Σ_1-et B-vel megegyező méretű Σ-vá:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}.$$

A C mátrix teljes SVD-felbontása a redukált felbontás kiegészítésével:

$$C=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -2 & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1/3\sqrt{2} & -4/3\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2}\\ -2/3 & 1/3 & 2/3\end{bmatrix}.,$$

ahol az utolsó mátrix harmadik sora az első két sor vektoriális szorzata.
C diadikus felbontása a redukált SVD felbontásból

$$3\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1 & -4 & 1\end{bmatrix}+1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}=$$

$$=3\cdot\begin{bmatrix}1/6 & 4/6 & -1/6\\ -1/6 & -4/6 & 1/6\end{bmatrix}+1\cdot\begin{bmatrix}1/2 & 0 & 1/2\\ 1/2 & 0 & 1/2\end{bmatrix}.$$

3. *Számítsuk ki az 1.-beli B és C mátrixok pszeudoinverzét az SVD felbontás segítségével!*

Megoldás: Az $U_1\Sigma_1V_1^*$ redukált felbontású mátrix pszeudoinverze $V_1\Sigma^{-1}U_1^*$.

$$B^+=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix}^+=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\ -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/2\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

$$C^+=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -2 & 1\end{bmatrix}^+=\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1 & 3\\ -4 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}5 & 4\\ 2 & -2\\ 4 & 5\end{bmatrix}$$

4. *Számítsuk ki az 1. feladatbeli négyzetes mátrixok polárfelbontását! Melyiknek van többféle is?*

Megoldás: Ha $A=U\Sigma V^*$ teljes SVD-felbontás, akkor A poláris felbontása $A=(U\Sigma U^*)(UV^*)$.
Az 1. feladat első két mátrixára ez $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$, és $B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$.
Az invertálható A mátrixnak egyértelmű a polárfelbontása, B polárfelbontásában viszont az ortogonális mátrix többféle is lehet, például a $B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ felbontás is megfelel.

5. *Adjuk meg az 1.-beli nem 1-rangú mátrixok legjobb 1-rangú közelítését! Mekkora a közelítő mátrix eltérése Frobenius-normában?*

Megoldás: Az A mátrixra

$$A^{(1)}=\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}.\text{ Az eltérés }\left\|\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right\|_F=\sqrt{1^2+0^2+0^2+0^2}=1,$$

vagy a tételből adódóan a kihagyott szinguláris értékek négyzetösszegének négyzetgyöke, ami $\sqrt{1^2}=1$.
A C mátrixra

$$C^{(1)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\end{bmatrix}\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1 & -4 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/2 & 2 & -1/2\\ -1/2 & -2 & 1/2\end{bmatrix}.$$

Az eltérés $\sqrt{\frac{1}{4}+0^2+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+0^2+\frac{1}{4}}=1$, illetve $\sqrt{\sigma_2^2}=1$.

6. *Mutassuk meg, hogy ha egy A komplex négyzetes mátrix poláris felbontásában $A = PQ = QP$, azaz a pozitív szemidefinit és az unitér rész felcserélhető, akkor A normális mátrix!*

Megoldás: $A^*A = (QP)^*(QP) = P^*Q^*QP = P^*P = P^2$, és $AA^* = (PQ)(PQ)^* = PQQ^*P^* = PP^* = P^2$, így $A^*A = AA^*$ (az átalakításban felhasználtuk, hogy Q unitérsége miatt $Q^*Q = QQ^* = I$, és P önadjungáltsága miatt $P^* = P$).

7. *Írjuk fel az alábbi mátrix karakterisztikus polinomját és minimálpolinomját!*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás: Mivel A felső háromszögmátrix, a karakterisztikus polinom közvetlenül leolvasható belőle: $k_A(x) = -(x-1)(x-2)^2$. Az $m_A(x)$ minimálpolinom osztója ennek, de minden sajátérték gyöke $m_A(x)$-nek, így $m_A(x) = (x-1)(x-2)$ vagy $(x-1)(x-2)^2$.

$$(A-I)(A-2I) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

így $m_A(x) = (x-1)(x-2)$.

8. *Van-e az egységmátrixon kívül olyan mátrix $\mathbb{R}^{2\times 2}$-ben, illetve $\mathbb{Q}^{2\times 2}$-ben, amelynek az ötödik hatványa az egységmátrix?*

Megoldás: Valós mátrixból van ilyen: az origó körüli 108°-os forgatás mátrixa.
Tegyük fel, hogy $A \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$, és $A^5 = I$. Ekkor az $x^5 - 1$ polinom annullálja az A mátrixot, következésképpen $m_A(x) \mid (x^5 - 1)$. De $x^5 - 1$ irreducibilisekre bontása $\mathbb{Q}[x]$-ben $(x-1)\Phi_5(x) = (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$, ezért $m_A(x)$ irreducibilis tényezői is ezek közül valók. De $\deg m_A(x) \leq \deg k_A(x) = 2$, így csak $x - 1$ szerepelhet $m_A(x)$-ben, s mivel $x^5 - 1$-nek osztója, $m_A(x) = x - 1$, amiből $A = I$ következik. Tehát az egységmátrixon kívül nincs más ilyen racionális elemű mátrix.