**1.** *a) Bizonyítsuk be, hogy ha egy $2n \times 2n$-es valós $A$ mátrix felbontható úgy $2 \times 2$-es blokkokra, hogy a diagonális blokkok mindegyike ugyanaz az $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ mátrix ($b \neq 0$), az átló fölött végig $I_{2\times 2}$ egységmátrixok állnak, mindenhol máshol pedig 0, akkor $A$ Jordan-normálalakja $\mathbb{C}$ fölött két konjugált $n \times n$-es Jordan-blokkból áll, az egyik a $\lambda = a + bi$ a másik a $\bar{\lambda} = a - bi$ sajátértékhez.*

*b) Lássuk be az a) rész alapján, hogy egy $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix akkor és csak akkor hasonló egy valós mátrixhoz, ha Jordan-normálalakjában a nem valós blokkok konjugált párokba oszthatók.*

*Megoldás:* a) $|A - xI| = \begin{vmatrix} a - x & b \\ -b & a - x \end{vmatrix}^n = (x^2 - 2ax + a^2 + b^2)^n$, tehát a sajátértékek $\frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4a^2 - 4b^2}}{2} = a \pm bi$, és mindkettőnek $n$ az algebrai multiplicitása.

Az $A-(a+bi)I$ mátrix olyan blokkháromszögmátrix, amelynek átlójában $\begin{bmatrix} -bi & b \\ -b & -bi \end{bmatrix}$ blokkok állnak, és ha minden páratlanadiknak az $i$-szeresét hozzáadjuk az alatta levőhöz, majd a párosadikak $b$-szeresét az alattuk levőhöz, akkor lépcsős alakot kapunk egyetlen nulla sorral az alján:

$$\begin{bmatrix} -bi & b & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ -b & -bi & 0 & 1 & & & \dots \\ & & -bi & b & 1 & 0 & \dots \\ & & -b & -bi & 0 & 1 & \dots \\ & & & \dots & & & \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -bi & b & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & i & 1 & & & \dots \\ & & -bi & b & 1 & 0 & \dots \\ & & 0 & 0 & i & 1 & \dots \\ & & & \dots & & & \end{bmatrix} \mapsto$$

$$\begin{bmatrix} -bi & b & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & i & 1 & & & \dots \\ & & 0 & 2b & 1 & 0 & \dots \\ & & 0 & 0 & i & 1 & \dots \\ & & & \dots & & & \end{bmatrix}$$

Így a $\lambda = a+bi$-hez tartozó sajátaltér egydimenziós, és ugyanígy (az előző mátrix konjugáltjával dolgozva) kapjuk azt, hogy a $\bar{\lambda}$-hoz tartozó sajátaltér is egydimenziós.

b) Mivel az a) rész szerint tetszőleges, két azonos méretű, $a \pm bi$ sajátértékű Jordan-blokkból álló Jordan mátrixhoz találtunk hozzá hasonló valós mátrixot, egy párosítható blokkokból álló Jordan-mátrixot permutációmátrixszal ilyen párokból álló alakba konjugálva, a kapott mátrix szintén hasonló lesz egy valós mátrixhoz.

**2.** *Mutassuk meg, hogy $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ akkor és csak akkor hasonló egy valós mátrixhoz, ha $A$ hasonló $\bar{A}$-hoz.*

*Megoldás:* Ha $A \sim B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, azaz van olyan $P$ invertálható, amelyre $P^{-1}AP = B$ valós, akkor $\bar{P}^{-1}\bar{A}\bar{P} = \bar{B} = B = P^{-1}AP$, így $\bar{A} \sim B \sim A$.

Fordítva, ha $A \sim \bar{A}$, és $J$ az $A$ mátrix Jordan-alakja, akkor $J \sim A \sim \bar{A} \sim \bar{J}$, ezért $J$ és $\bar{J}$ egymáshoz hasonló Jordan-mátrixok. A Jordan-alak egyértelműségéből következik, hogy $J$ és $\bar{J}$ blokkjai sorrendtől eltekintve megegyeznek, és ez pont azt jelenti, hogy $J$ nem valós blokkjai konjugált párokba oszthatók, tehát az 1.b) feladat szerint $A$ hasonló egy valós mátrixhoz.

**3.** *Bizonyítsuk be, hogy egy $A$ mátrix akkor és csak akkor cserélhető fel egy nilpotens $N$ Jordan-blokkal, ha $A$ polinomja $N$-nek, azaz $A$ felső háromszögmátrix, amelynek a főátló irányú egyenesein azonos elemek állnak.*

*Megoldás:* Ha $A$ polinomja $N$-nek, akkor nyilván felcserélhető $N$-nel.

Fordítva, legyen $A$ és $N$ $n \times n$-es, $N$ nilpotens Jordan-blokk, és tegyük fel, hogy $AN = NA$. Ekkor $\mathbf{e}_i = N^{n-i}\mathbf{e}_n$ minden $i$-re. Tegyük fel, hogy

$$A\mathbf{e}_n = a_1\mathbf{e}_1 + \ldots + a_n\mathbf{e}_n.$$

Ez átírható

$$A\mathbf{e}_n = a_1N^{n-1}\mathbf{e}_n + a_2N^{n-2}\mathbf{e}_n + \ldots + a_{n-1}N\mathbf{e}_n + a_nI\mathbf{e}_n = (a_1N^{n-1} + a_2N^{n-2} + \ldots + a_{n-1}N + a_nI)\mathbf{e}_n$$

alakba, vagyis az

$$f(x) = a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \text{ polinomra } A\mathbf{e}_n = f(N)\mathbf{e}_n,$$

tehát $A$ és $f(N)$ ugyanúgy hat $\mathbf{e}_n$-en. De az $A$ és $N$ felcserélhetősége miatt a többi báziselemen is ugyanúgy hatnak:

$$A\mathbf{e}_i = AN^{n-i}\mathbf{e}_n = N^{n-i}A\mathbf{e}_n = N^{n-i}f(N)\mathbf{e}_n = f(N)N^{n-i}\mathbf{e}_n = f(N)\mathbf{e}_i,$$

ezért $A = f(N)$.

**4.** *Határozzuk meg az alábbi $A$ mátrix Jordan-normálalakját és Jordan-bázisát, majd ennek a segítségével számítsuk ki az $A^n$ hatványokat!*

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

*Megoldás:* $k_A(x) = -x^3 + 3x^2 - 2 - 6 - 2x + 9 - 3x + 2x = -(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = -(x-1)^3$. Tehát $A$ egyetlen sajátértéke az 1.

$$A - I = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

miatt $\dim V_1 = 1$, vagyis az $J$ Jordan-normálalak egyetlen Jordan-blokkból áll. A Jordan-bázis így egyetlen Jordan-lánc, és bármely olyan vektor generálhatja, amelynek a $\lambda$-hossza 3, s mivel minden vektor általánosított sajátvektor az 1-hez, elég egy tetszőleges olyan vektort választani, amely nincs benne a $\mathrm{Ker}(A-I)^2$ altérben.

$$(A-I)^2 \mapsto \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Így $\mathrm{Ker}((A-I)^2) = \mathrm{span}((1,2,0),(-1,0,2))$, és $\mathbf{v} = (1,0,0)$ ezen kívül van, és az általa generált Jordan-lánc

$$(4,0,-8) \xleftarrow{A-I} (2,2,-2) \xleftarrow{A-I} (1,0,0).$$

Tehát

$$A^n = PJ^nP^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -8 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & n & \binom{n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 8 & -4 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 4n+2 & 2n^2+1 \\ 0 & 2 & 2n \\ -8 & -8n-2 & -4n^2+2n \end{bmatrix} \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 8 & -4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2n^2+1 & -n^2+2n & n^2 \\ 2n & -n+1 & n \\ -4n^2+2n & 2n^2-5n & -2n^2+n+1 \end{bmatrix}$$

**5.** *Hermite-interpolációval számítsuk ki az* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ *mátrixra az $e^{2A}$ értékét!*

*Megoldás:* $k_A(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$, és $m_A(x) = (x-2)^2$. Az $f(e^{2x})$ függvényt egy $p(x) = a + bx$ legföljebb elsőfokú polinommal interpolálhatjuk.

$$\begin{array}{ccc} p(x) = a + bx & f(x) = e^{2x} & p(2) = a + 2b = e^4 \\ p'(x) = b & f'(x) = 2e^{2x} & p'(2) = b = 2e^4 \end{array}$$

Így $a = -3e^4$, $b = 2e^4$, és

$$e^{2A} = -3e^4 I + 2e^4 A = e^4 \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

**6.** *Adjuk meg az alábbi $A$ mátrix négyzetgyökét Hermite-interpoláció segítségével!*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

*Megoldás:* $k_A(x) = -(x-1)^2(x-4)$, $m_A(x) = (x-1)^2(x-4)$, $f(x) = \sqrt{x}$

$$\begin{array}{ccc} p(x) = a + bx + cx^2 & f(x) = \sqrt{x} & p(1) = a + b + c = 1 \\ p'(x) = b + 2cx & f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} & p'(1) = b + 2c = \frac{1}{2} \\ & & p(4) = a + 4b + 16c = 2 \end{array}$$

$\Rightarrow c = -\frac{1}{18}$, $b = \frac{11}{18}$, $a = \frac{4}{9} \Rightarrow p(x) = \frac{1}{18}(8 + 11x - x^2)$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \sqrt{A} = \frac{1}{18}(8I + 11A - A^2) = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/18 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

**7.** *Általánosítható-e az Hermite-interpolációra Lagrange interpolációs módszere az alappolinomok megkonstruálásával, illetve Newton módszere, amelyben a feltételek egyenkénti hozzáadásával módosítjuk az előző lépésekben legyártott polinomot?*

*Megoldás:* Legyenek az interpoláció alappontjai $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, és ehhez keresünk olyan $p(x)$ polinomot, amelyre $p^{(j)}(\lambda_i) = f_{ij}$ $(i = 1, \ldots, k,\ j = 0, \ldots, b_i - 1)$, továbbá az $n = \sum b_i$ értékre $\deg p \leq n - 1$. Elő lehet állítani a Lagrange-módszerhez hasonlóan alappolinomokat: olyan $g_{ij}(x)$ polinomokat, amelyeknek csak a $\lambda_i$-beli $j$-edik deriváltja 1, minden más 0, és akkor $p(x) = \sum\limits_{i,j} f_{ij} g_{ij}(x)$ megfelel, de az alappolinomok előállítása sokkal bonyolultabb, mint a Lagrange-interpolációnál.
A Newton-interpolációhoz hasonlóan tegyük fel, hogy van egy interpoláló $q(x)$ polinomunk az $i = 1, \ldots, k$ és $j = 0, \ldots, b_i - 1$ értékekhez, és legyen $m(x) = \prod\limits_i (x - \lambda_i)^{b_i}$. Az új feltételhez $p(x) = q(x) + c \cdot m(x)$ alakú polinomot keresünk, ahol $c$ később meghatározandó konstans, mert ez biztosan kielégíti az eredeti feltételeket. Másrészt az új feltételhez, akár egy új $\lambda_{k+1}$ hozzáadásáról van szó, akár egy meglevő $\lambda_i$ következő deriváltjáról, találunk megfelelő $c$ értéket, ui. $m(\lambda_{k+1}) \neq 0$, és $m^{(b_i)}(\lambda_i) \neq 0$ is igaz, mivel a $b_i$-edik deriváltnak csak abban a tagjában nem szerepel az $(x - \lambda_i)$ tényező, amelyik $\left((x-\lambda_i)^{b_i}\right)^{(b_i)} \left(\prod\limits_{s \neq i} (x - \lambda_s)^{b_s}\right)^{(0)} = b_i! \left(\prod\limits_{s \neq i} (x - \lambda_s)^{b_s}\right)$ alakú.

**8.** *Hány olyan páronként nem hasonló, nem diagonalizálható* $3 \times 3$*-as komplex mátrix van, amelynek determinánsa* $0$*, és a nyoma* $1$*?*

*Megoldás:* Legyen $A$ ilyen mátrix. Mivel $\det A = 0$, a 0 sajátértéke $A$-nak. Másrészt $\operatorname{tr} A = 1$, tehát a sajátértékek összege 1. Viszont ha mindegyik sajátértéke különböző lenne, akkor a mátrix diagonalizálható lenne. Tehát a sajátértékek vagy $0, 0, \lambda$, ahol $\operatorname{tr} A = 1$ miatt $\lambda = 1$, vagy $0, \lambda, \lambda$, ahol $\operatorname{tr} A = 1$ miatt $\lambda = \frac{1}{2}$. Mivel a mátrix nem diagonalizálható, a Jordan-normálalak a következő kettő egyike.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Tehát hasonlóság erejéig csak két ilyen mátrix létezik.

**9.** *Adjunk meg az alábbi* $A$ *és* $B$ *mátrixokhoz olyan* $P$ *invertálható mátrixot, amellyel* $P^{-1}AP = B$*.*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

*Megoldás:* Hozzuk mindkettőt Jordan-normálalakra. $k_A(x) = k_B(x) = -x(x-1)^2$, és $A - I$ és $B - I$ is 2 rangú, tehát a Jordan-alakjuk

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Keressünk mindkettőhöz Jordan-bázist.

$$A-I=\begin{bmatrix}-1 & -1 & -2\\ -1 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} \mapsto\mapsto \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow{\cdot(A-I)} \begin{bmatrix}-1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\operatorname{Ker}(A-I)=\operatorname{span}((-1,-1,1)) \qquad \operatorname{Ker}(A-I)^2=\operatorname{span}((0,1,0),(-1,0,1))$$

$$\mathbf{0} \xleftarrow{(A-I)\cdot} (-1,-1,1) \xleftarrow{(A-I)\cdot} (0,1,0)$$

$$A=\begin{bmatrix}0 & -1 & -2\\ -1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{0} \xleftarrow{A\cdot} (-2,-2,1)$$

$$P_1=\begin{bmatrix}-1 & 0 & -2\\ -1 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\text{-gyel} \qquad P_1^{-1}AP_1=J$$

$$B-I=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} \mapsto\mapsto \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow{\cdot(B-I)} \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\operatorname{Ker}(B-I)=\operatorname{span}((0,-1,1)) \qquad \operatorname{Ker}(B-I)^2=\operatorname{span}((0,1,0),(0,0,1))$$

$$\mathbf{0} \xleftarrow{(A-I)\cdot} (0,-1,1) \xleftarrow{(A-I)\cdot} (0,0,1)$$

$$B=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{0} \xleftarrow{B\cdot} (1,-2,1)$$

$$P_2=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\text{-gyel} \qquad P_2^{-1}BP_2=J$$

Tehát $B=P_2JP_2^{-1}=P_2P_1^{-1}AP_1P_2^{-1}=P^{-1}AP$, ahol

$$P=P_1P_2^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & -2\\ -1 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & -1 & 0\end{bmatrix}$$