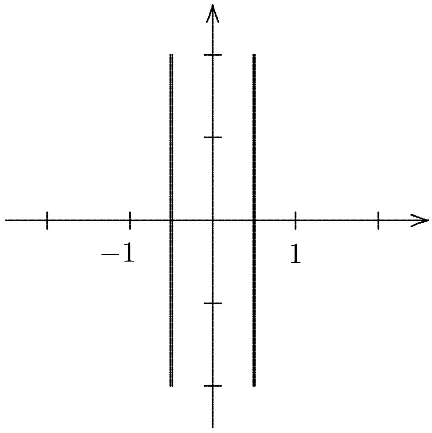
1. *Ábrázoljuk a* $\left\{P \;\middle|\; |d(P,F_2) - d(P,F_1)| = 1\right\}$ *"hiperbolát", ha* $F_1 = (1,0)$, $F_2 = (-1,0)$, *és* d *az* 1*-norma, illetve a* ∞*-norma által indukált metrika* $\mathbb{R}^2$*-en.*

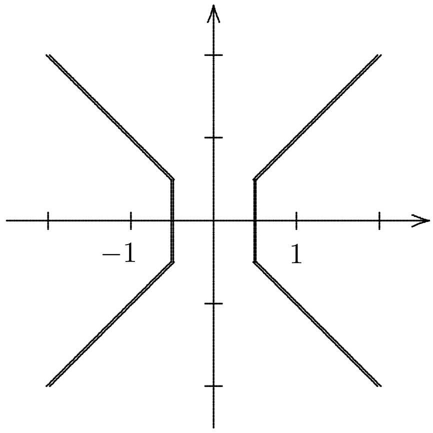
Megoldás: Elég a $d(P,F_2) - d(P,F_1) = 1$ egyenletet megoldani, a $d(P,F_2) - d(P,F_1) = -1$ megoldása ennek az y tengelyre vett tükörképe.

1-normában az alakzatot az $|x+1| + |y| - (|x-1| + |y|) = 1$, azaz $|x+1| - |x-1| = 1$ egyenlet írja le. $|x+1| > |x-1| \Rightarrow (x+1)^2 > (x-1)^2 \Rightarrow x > 0$, így $|x+1| = x+1$. Ha $x \geq 1$, akkor az $x+1-(x-1) = 1$ egyenlet ellentmondásos, tehát $0 < x < 1$, és az egyenlet $(x+1) - (1-x) = 1$ alakú, aminek $x = \frac{1}{2}$ (és $y \in \mathbb{R}$ tetszőleges) a megoldása.

∞-normában az egyenlet $\max\{\,|x+1|, |y|\,\} - \max\{\,|x-1|, |y|\,\} = 1$. A maximum nem lehet mindkét esetben az $|y|$, mert akkor 0 lenne a különbség. Ha mindkét esetben az x-es kifejezés a maximum, akkor az $|x+1| - |x-1| = 1$ ($|y| \leq |x-1|$) adja a megoldást, és az 1-normában kapott egyenlet alapján ez $x = \frac{1}{2}$, $|y| \leq \frac{1}{2}$. Végül, ha a két tag közül csak az egyikben nagyobb az $|y|$, akkor az kisebb a másik x-es tagjánál, tehát csak úgy lehet 1 a különbség, ha $|x+1| \geq |y| \geq |x-1|$, és $|x+1| - |y| = 1$. Ebből következik, hogy $|x+1| - |x-1| \geq 1$, tehát $x \geq \frac{1}{2}$ és $|y| = |x+1| - 1 = x$, azaz $y = \pm x$.

A két görbéhez a tükörképét is hozzátéve a következő alakzatokat kapjuk.





2. *a) Bizonyítsuk be, hogy ha* P *egy pont a síkon, és* e *egy egyenes, akkor* $\mathbb{R}^2$ *minden normája szerint van* e*-nek* P*-hez legközelebbi pontja (ennek a* P*-től való távolsága az* e *egyenes távolsága* P*-től).*

b) Lássuk be, hogy a tengelyekkel párhuzamos egyenesektől való távolság minden p*-normára megegyezik az euklideszi távolsággal*

c) Határozzuk meg a $P(1,1)$ *pont távolságát az* $e: \;\; y = 2x$ *egyenestől az* 1-, 2- *és* ∞*-norma szerint. Melyik az* e *egyenes* P*-hez legközelebbi pontja ezekre a normákra nézve?*

Megoldás: a) Ha $\mathbf{v} = \mathbf{a} + t\mathbf{b}$ az egyenes egyenlete, és $\mathbf{c}$ a pont, akkor az $f(t) = \|\mathbf{a} + t\mathbf{b} - \mathbf{c}\|$ függvény folytonos, ugyanis

$$|f(t_2) - f(t_1)| = \big|\,\|\mathbf{a} + t_2\mathbf{b} - \mathbf{c}\| - \|\mathbf{a} + t_1\mathbf{b} - \mathbf{c}\|\,\big| \leq \|(\mathbf{a} + t_2\mathbf{b} - \mathbf{c}) - (\mathbf{a} + t_1\mathbf{b} - \mathbf{c})\| =$$
$$= \|(t_2 - t_1)\mathbf{b}\| = |t_2 - t_1| \cdot \|\mathbf{b}\|.$$

Mivel a függvény alulról korlátos is, van minimuma.

b) Legyen $e: \;\; y = a$ egy x tengellyel párhuzamos egyenes, és $P(x_0, y_0)$. Ekkor

$$d(P,e) = \min_x \left(|x_0 - x|^p + |y_0 - a|^p\right)^{1/p} \geq \left(|y_0 - a|^p\right)^{1/p} = |y_0 - a|,$$

és ezt $x = x_0$-ra el is lehet érni. Ugyanígy igaz, hogy P-nek egy $e: \;\; x = a$ egyenestől vett távolsága $|x_0 - a|$.

c) $f(x) = |x-1| + |2x-1| = \begin{cases} 1 - x + 1 - 2x = 2 - 3x, & \text{ha } x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - x + 2x - 1 = x, & \text{ha } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ x - 1 + 2x - 1 = 3x - 2, & \text{ha } 1 \leq x \end{cases}$

Az első szakaszon $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, a másodikon $\frac{1}{2}$, a harmadikon $f(1) = 1$ a minimum, tehát $d(P,e) = \frac{1}{2}$, és az e P-hez legközelebbi pontja $(\frac{1}{2}, 1)$.

Euklideszi normában az egyenesre állított merőleges talppontja, azaz $y = 2x$ és $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ metszéspontja, azaz $(\frac{3}{5}, \frac{6}{5})$ a legközelebbi pont, és $d(P, e) = \frac{1}{\sqrt{5}}$.
∞-normában

$$\max\{\,|x-1|, |2x-1|\,\} = \begin{cases} \max\{\,1-x, 1-2x\,\} = 1-2x, & \text{ha } x \le 0 \\ \max\{\,1-x, 1-2x\,\} = 1-x. & \text{ha } 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ \max\{\,1-x, 2x-1\,\} = 1-x, & \text{ha } \frac{1}{2} \le x \le \frac{2}{3} \\ \max\{\,1-x, 2x-1\,\} = 2x-1, & \text{ha } \frac{2}{3} \le x \le 1 \\ \max\{\,x-1, 2x-1\,\} = 2x-1, & \text{ha } 1 \le x \end{cases}$$

A minimum az egyes szakaszokon 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, 1, tehát $d(P, e) = \frac{1}{3}$, és a legközelebbi pont $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$.

3. *Határozzuk meg az alábbi mátrixok Frobenius-normáját, 1-, 2- és ∞-normáját és spektrálsugarát!*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás: $\|A\|_F = \sqrt{4} = 2$, $\|A\|_1 = \max\{\,1, 2, 1\,\} = 2$, $\|A\|_\infty = \max\{\,2, 2, 0\,\} = 2$, $\rho(A) = 1$, és $A^*A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, aminek a karatkerisztikus polinomja $-x(x^2 - 4x + 3) = -x(x-1)(x-3)$, így $\|A\|_2 = \sigma_1 = \sqrt{3}$.
$\|B\|_F = \sqrt{4} = 2$, $\|B\|_1 = \max\{\,2, 2\,\} = 2$, $\|B\|_\infty = \max\{\,2, 2\,\} = 2$, $k_B(x) = (x^2 - 2x + 2)$, B sajátértékei $1 \pm i$, és $\rho(B) = \sqrt{2}$. Végül $B^*B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, tehát B szinguláris értékei $\sqrt{2}, \sqrt{2}$, és így $\|B\|_2 = \sqrt{2}$.

4. *Mutassuk meg, hogy egy $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix spektrálsugara legföljebb akkora, mint bármely mátrixnorma szerinti normája, képlettel:*

$$\rho(A) \le \|A\|,$$

speciálisan legföljebb akkora, mint a 2-normája!

Megoldás: Legyen $\mathbf{v}$ a maximális abszolút értékű λ sajátértékhez tartozó sajátvektor. Ekkor $\|A\mathbf{v}| = \|\lambda\mathbf{v}\| = |\lambda|\|\mathbf{v}\| = \rho(A)\|\mathbf{v}\|$, tehát $\|A\| \ge \frac{\|A\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \rho(A)$.

5. *Mutassuk meg, hogy ha A normális mátrix, akkor a 2-normája egyenlő a spektrálsugarával!*

Megoldás: Legyen A normális mátrix, és $|\lambda_1| \ge |\lambda_2| \ge \cdots \ge |\lambda_n|$ a sajátértékek abszolút értékei. Ekkor van olyan V unitér mátrix, amellyel $V^{-1}AV = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Vegyük az $U = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ unitér mátrixot, amelyre $\varepsilon_i = \begin{cases} \frac{\lambda_i}{|\lambda_i|}, & \text{ha } \lambda_i \ne 0 \\ 1, & \text{ha } \lambda_i = 0. \end{cases}$
Ekkor $A = VDV^* = (VU)\operatorname{diag}(|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n|)V^*$ SVD felbontás, mert VU és V unitér, és a középső diagonális mátrix átlós elemei nemnegatív valós számok fogyó sorrendben. Így $\|A\|_2 = \sigma_1 = |\lambda_1|$.

6. *Adjuk meg az $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix legjobb 1 rangú közelítését a Frobenius-, 2-, 1- és ∞-norma szerint! (Az első kettőnél használjuk az Eckart–Young-tételt!.)*

Megoldás: A Frobenius- és 2-normában való közelítéshez számítsuk ki az $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix SVD felbontását.
$A^*A = \begin{bmatrix} 29 & 14 \\ 14 & 8 \end{bmatrix}$, és $k_{A^*A}(x) = x^2 - 37x + 36 = (x-36)(x-1)$.
A^*A ortonormált sajátpárjai $\left(36, \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)\right)$ és $\left(1, \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2)\right)$. Ebből

$$V = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad AV = \begin{bmatrix} 12 & -1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}, \qquad U = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ebből $A = U\Sigma V^*$, és $A^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}[6]\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}24/5 & 12/5\\12/5 & 6/5\end{bmatrix}$.
A közelítés hibája Frobenius- és 2-normában is 1.

Az 1-norma és a ∞-norma közül elég a ∞-normára megoldani a feladatot, ugyanis a mátrix szimmetrikus, ezért a ∞-normabeli legjobb közelítés transzponáltja adja az 1-normabeli legjobb közelítést.

1 hibájú közelítést könnyű találni: $\begin{bmatrix}4 & 2\\2 & 1\end{bmatrix}$, tehát csak azt kell megnézni, hogy van-e ennél jobb. Mivel minden számot legföljebb 1-gyel változtathatunk, a számok pozitívak maradnak, és a felső sorban az első elem marad a nagyobb. Tehát ahhoz, hogy a rang 1 legyen, azaz a B közelítő mátrixban $b_{11}/b_{12} = b_{21}/b_{22}$ legyen, az alsó arányt növelni kell, a felsőt viszont csökkenteni, mivel $|x| + |y| < 1$-re

$$\frac{2+x}{2+y} \le \frac{2+|x|}{2-|y|} = 1 + \frac{|x|+|y|}{2-|y|} < 2.$$

Az alsó arány növelése során gazdaságosabb csak a második elemet csökkenteni, ugyanis $x \neq 0$-ra

$$\frac{2+x}{2+y} \le \frac{2+|x|}{2-|y|} < \frac{2}{2-|x|-|y|},$$

mert $4 - |x|^2 - 2|y| - |x||y| < 4 - 2|y|$, tehát az $f(x) = \frac{2}{2-z}$ monoton növő függvény ($[0,1)$-en) valamely $z < |x| + |y|$-ra veszi föl ugyanezt a $\frac{2+x}{2+y}$ arányt.
Ugyanígy érdemes az első sort is csak a második elemben változtatni. Itt az arányt csökkenteni kell, és $x \neq 0$-ra

$$\frac{5+x}{2+y} \ge \frac{5-|x|}{2+|y|} > \frac{5}{2+|y|+|x|},$$

ugyanis $3|x| - |x||y| - |x|^2 > 0$, mert a feltevés szerint $3 > 1 > |x| + |y|$. Tehát az $\frac{5}{2+z}$ monoton fogyó függvény a $[0,1)$-en valamely $z < |x| + |y|$-re veszi föl ugyanazt az $\frac{5+x}{2+y}$ arányt.

Végül azt kell megnéznünk, hogy $0 \le x, y \le 1$-re mi az x és y maximumának minimuma az $\frac{5}{2+x} = \frac{2}{2-y}$, azaz $2x+5y = 6$ feltétel mellett. Ezt a minimumot $y = x$ esetén érjük el, így $x = y = \frac{6}{7}$.
Tehát ∞-normában a legjobban közelítő ≤ 1 rangú mátrix $\begin{bmatrix}5 & 20/7\\2 & 8/7\end{bmatrix}$, a közelítés hibája pedig $6/7$.

7. *Bizonyítsuk be, hogy egy d-reguláris egyszerű irányítatlan gráf szomszédsági mátrixának spektrálsugara és 1-, 2 és ∞-normája is d.*

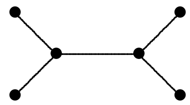
Megoldás: Minden sorösszeg és oszlopösszeg d, így az 1- és ∞-norma is d. A 4. feladat szerint emiatt a spektrálsugár legföljebb d, másrészt a csupa-1 vektor sajátvektor d sajátértékkel, így a spektrálsugár is d. Végül, mivel a mátrix szimmetrikus, így normális is, a spektrálsugara megegyezik a 2-normájával, tehát az utóbbi is d.

8. *Mi a spektruma az alábbi gráfoknak? Az a) és b) feladatbeli gráfra keressük meg a sajátvektorokat is!*

a) 3, illetve 4 szögpontú teljes gráf

b) 4 hosszú kör

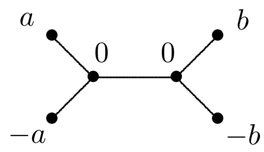
c)



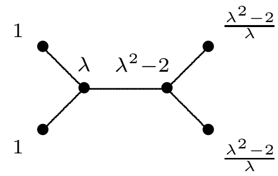
Megoldás: a) Általánosan is könnyű megadni a K_n teljes gráf spektrumát. Ugyanis a gráf szomszédsági mátrixa $J - I$, ahol J a csupa-1 mátrix. Tudjuk, hogy J-nek a 0 $(n-1)$-szeres sajátértéke (mivel $r(J) = 1$), és még az n egy sajátérték, tehát K_n sajátértékei: -1 $(n-1)$-szeresen, és $n-1$ (1-szeresen). Speciálisan $n = 3$-ra $-1, -1, 2$, és $n = 4$-re $-1, -1, -1, 3$. A K_n $(n-1)$-hez tartozó sajátvektora az $(1, 1, \ldots, 1)$ vektor (és skalárszorosai). A -1-hez tartozó sajátalteret kigenerálják az $(1, -1, 0, \ldots, 0)$, $(0, 1, -1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $(0, \ldots, 0, 1, -1)$ vektorok (a 0-kban $1 + (-1) + 0 + \ldots + 0 = 0$ a szomszédok értékeinek összege, az 1 értékű csúcsban -1, a -1 értékűben pedig 1).

b) Mivel minden csúcs két szomszédja két átellenes (egy átló két végpontján levő) csúcs, 0-hoz csak az a vektor lehet sajátvektor, ahol az átellenes csúcsok értéke egymás negatívja, azaz (a négyszögön körbejárva) az $(a, b, -a, -b)$ alakú vektorok. Ezek egy 2-dimenziós sajátalteret generálnak. Mivel a gráf 2-reguláris, spektrálsugara a 2, és ehhez tartozó sajátvektor $(1, 1, 1, 1)$, továbbá mivel páros gráf (vagy mert a mátrixának a nyoma 0), a -2 is sajátérték, ehhez tartozik az $(1, -1, 1, -1)$ vektor. A spektrum ezek szerint $0, 0, 2, -2$.

c) Írjuk fel a gráfra, hogy a $\lambda = 0$ és a $\lambda \neq 0$ sajátértékekhez milyen sajátvektor tartozhat. $\lambda = 0$ esetén a két középső csúcsban 0-nak kell lennie, mert a leveleken a szomszédok értékeinek összege 0. A középső csúcsokban is 0 kell, hogy legyen a szomszédok értékeinek összege, ezért az egy oldalon levő két csúcson az értékek egymás negatívjai.



Tehát a 0-hoz tartozó sajátaltér 2-dimenziós, és az $(1, -1, 0, 0, 0, 0)$ és $(0, 0, 0, 0, 1, -1)$ vektorok generálják.
Most tekintsünk egy $\lambda \neq 0$ sajátértéket. Ha valamelyik levélen 0 lenne, akkor könnyen látható, hogy minden csúcsban 0 állna, tehát nem kapnánk sajátvektort. Így feltehető, hogy az egyik levélen 1 áll. Ekkor a szomszédján λ, annak a másik levelén is 1, a másik középsőn $\lambda^2 - 2$, végül a maradék két levélen $\frac{\lambda^2-2}{\lambda}$.



A jobb oldali középső csúcs miatt $\lambda^3 - 2\lambda = \lambda + 2 \cdot \frac{\lambda^2-2}{\lambda}$, azaz $\lambda^4 - 5\lambda^2 + 4 = 0$, amiből a másik négy sajátérték $\pm 1, \pm 2$. (A sajátvektorok is könnyen leolvashatók, ha az ábrán behelyettesítjük λ-ba a konkrét értékeket).