1	2-8	9-12	13-	Σ

NÉV ______________________________ **NEPTUNKÓD** __________

Bevezetés az algebrába 2 **1. vizsga – elmélet** **2020-05-28**

A tesztkérdésekre 20, a definíciók, tételek precíz megfogalmazására 10, a bizonyításos részre 10 pont kapható. A válaszokat írjuk a kérdéshez tartozó üres dobozba, vagy külön lapon a feladatlap beosztásának megfelelő helyre, jól láthatóan elkülönítve az egyes feladatokat! Kidolgozási idő 60 perc. Segédeszköz nem használható!

1. Mindegyik állításról állapítsuk meg, hogy igaz vagy hamis (I|H)! *(6 pont)*

a) Minden altérnek van direkt kiegészítője. I

b) Egy euklideszi tér nemnulla vektora tetszőleges nemnulla vektorba átvihető hipersíkra való tükrözéssel. H

c) Ha a C valós mátrix teljes sorrangú, akkor C^TC pozitív definit. H

d) Minden valós mátrix ortogonálisan hasonló egy háromszögmátrixhoz H

e) Minden nemüres gráf szomszédsági mátrixa indefinit. I

f) Egy $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrixra $r(A^k) - r(A^{k+1})$ nem lehet nagyobb a Jordan-alakjában a 0-hoz tartozó Jordan-blokkok számánál. I

2. Mondjuk ki azokat a vektortér-axiómákat, amelyekben szerepel skalár is, és vektorok összeadása is. *(2 pont)*

$\lambda(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$
$(\lambda+\mu)\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{v}$

3. A következők közül melyek invariánsak a hasonlóságra?
(A) nyom (B) főminorok (C) rang (D) oszloptér *(2 pont)*

A, C

4. Ha $A = 2\cdot\begin{bmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & 1/2\end{bmatrix} + 1\cdot P_2$ spektrálfelbontás, akkor mi a P_2 és az A mátrix? *(2 pont)*

$P_2 = \begin{bmatrix}1/2 & -1/2\\ -1/2 & 1/2\end{bmatrix}$ és $A = \begin{bmatrix}3/2 & 1/2\\ 1/2 & 3/2\end{bmatrix}$

5. Ha Q szemiortogonális mátrix, akkor mik a Q szinguláris értékei és mi a pszeudoinverze? *(2 pont)*

Minden szing. értéke 1.
Q pszeudoinverze Q^*

6. Mik lehetnek a sajátértékei egy olyan mátrixnak, amely egyszerre unitér és ferdén önadjungált? *(2 pont)*

$\pm i$

7. Legyen $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}^TA\mathbf{y}$ valós bilineáris függvény, ahol $A = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}$. Adjunk meg olyan $\mathbf{v}$ vektort, amelyre $\varphi(\mathbf{e}_1,\mathbf{v}) = 2$. *(2 pont)*

Például $\mathbf{v} = 2\mathbf{e}_2$

8. Legyen $A = \begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$. Az $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ hány részhalmaza generál A-invariáns alteret?

4 részhalmaz ($\emptyset$, $\{\mathbf{e}_1\}$, $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}$, $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$)

9. Definiáljuk egy $f : V \to W$ lineáris leképezés magterét és képterét! *(2 pont)*

Magtér: $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{v} \in V \mid f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\} \leq V$
Képtér: $\operatorname{Im} f = \{f(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in V\} \leq W$

10. Mit jelent az, hogy egy f függvény értelmezve van az A mátrix spektrumán, és hogyan definiáljuk ilyen függvényre az $f(A)$ mátrixot? *(3 pont)*

Legyen $m_A(x) = (x - \lambda_1)^{b_1} \cdots (x - \lambda_r)^{b_r}$ az A minimálpolinomja, ahol $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ különbözők.
f értelmezve van az A spektrumán, ha $\exists\ f^{(j)}(\lambda_i)$ $(i = 1, \ldots, r,\ \ j = 0, \ldots, b_i - 1)$
$f(A) = p(A)$, ha $p(x)$ olyan polinom, amelyre $f^{(j)}(\lambda_i) = p^{(j)}(\lambda_i)$ $(i = 1, \ldots, r,\ \ j = 0, \ldots, b_i - 1)$

11. Mondjuk ki a komplex euklideszi térben érvényes háromszögegyenlőtlenséget, az egyenlőség feltételével együtt! *(3 pont)*

$|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$
$= \ \Leftrightarrow$ $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ valamelyike a másik nemnegatív valós skalárszorosa.

12. Mondjuk ki a Cayley–Hamilton-tételt! *(2 pont)*

Tetszőleges test fölötti négyzetes mátrixot annullálja a karakterisztikus polinomja.

A következő két feladatot külön lapon oldjuk meg!

13. Mondjuk ki és bizonyítsuk be a minimálpolinom gyökeiről szóló tételt! *(3 pont)*

Tétel: Egy A mátrix minden sajátértéke gyöke a minimálpolinomjának.
Biz.: Legyen $\mathbf{v} \neq 0$ a λ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$.
$\Rightarrow A^k\mathbf{v} = \lambda^k\mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{0} = O\mathbf{v} = m(A)\mathbf{v} = m(\lambda)\mathbf{v}$, és $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, így $m(\lambda) = 0$.

14. A QR-felbontás egyértelműségének vázlatos bizonyítása:

$A = QR = Q'R'$
$\Rightarrow Q = Q'R'R^{-1}$
$S := R'R^{-1},\ \ Q = Q'S$
$I = Q^TQ = S^T(Q')^TQ'S = S^TS$
$\Rightarrow S^T = S^{-1}$ alsó és felső $\triangle$ is

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} S \text{ diagonális,} \\ \text{és így } S \text{ szimm.} \Rightarrow I = S^TS = S^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad S = I \ \Rightarrow \ R = R' \ \Rightarrow \ Q = Q'$$

a) Mik a feltételek a QR-felbontás Q és R mátrixára? *(2 pont)*

Q szemiortogonális, R négyzetes felső háromszögmátrix, amelynek a diagonális elemei pozitívak.

b) Hol és hogyan használjuk a bizonyításban az R diagonális elemeire vonatkozó feltételt? *(3 pont)*

A "$\Rightarrow S = I$" következtetéshez kellett.
R diag. elemei pozitívak $\Rightarrow R^{-1}$, és így S diag. elemei is pozitívak. Így ha $S = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$, akkor $I = S^2 = \operatorname{diag}(d_1^2, \ldots, d_n^2) \Rightarrow \forall\ d_i^2 = 1 \Rightarrow \forall\ d_i = \pm 1$, de $d_i > 0 \Rightarrow \forall d_i = 1$.

c) Adjunk az $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 2\end{bmatrix}$ QR-felbontású mátrixra egy másik felbontást, ahol a b) részben említett feltételt nem követeljük meg, de a többit igen. *(2 pont)*

Pl. $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 2\\0 & -2\end{bmatrix}$