1	2-8	9-12	13-	Σ

NÉV ______________________________ **NEPTUNKÓD** __________

Bevezetés az algebrába 2 **2. vizsga – elmélet** **2020-06-04**

A tesztkérdésekre 20, a definíciók, tételek precíz megfogalmazására 10, a bizonyításos részre 10 pont kapható. A válaszokat írjuk a kérdéshez tartozó üres dobozba, vagy külön lapon a feladatlap beosztásának megfelelő helyre, jól láthatóan elkülönítve az egyes feladatokat! Kidolgozási idő 60 perc. Segédeszköz nem használható!

1. Mindegyik állításról állapítsuk meg, hogy igaz vagy hamis (I|H)! *(6 pont)*

a) Minden generátorrendszer tartalmaz bázist. I

b) Minden $f : V \to V$ lineáris transzformációra igaz, hogy $V = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$. H

c) Ha egy $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix négyzete diagonalizálható, akkor A is diagonalizálható. H

d) Ha egy komplex mátrix minden sajátértéke 1 abszolút értékű, akkor a mátrix unitér. H

e) Ha a C valós mátrix teljes oszloprangú, akkor C^TC pozitív definit. I

f) Egy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix bármely invariáns alterének a merőleges kiegészítője is A-invariáns. H

2. Mondjuk ki azokat a vektortér-axiómákat, amelyekben testművelet (skalárok közötti művelet) is szerepel!

$$\left.\begin{array}{l}(\lambda+\mu)\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{v}\\ (\lambda\mu)\mathbf{v} = \lambda(\mu\mathbf{v})\end{array}\right\} \quad \forall \lambda,\mu \in K,\ \mathbf{v}\in V$$

3. Hányféle különböző koordinátavektora lehet a $\mathbf{v} = \mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3$ vektornak azokban a bázisokban, amelyek a $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ elemekből állnak, de a sorrendet bárhogy megválaszthatjuk. Írjuk is fel a lehetséges koordinátavektorokat!

3 féle: $\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}$

4. Adjunk meg két ekvivalens feltételt arra, hogy egy P négyzetes mátrix valamely vetítés mátrixa legyen!

$P^2 = P$

$P \sim \begin{bmatrix} I & O\\ O & O\end{bmatrix}$

5. Mi lehet a minimálpolinomja annak a nem diagonalizálható mátrixnak, amelynek karakterisztikus polinomja $k(x) = (x-1)^2x^2$?

$(x-1)^2x^2$, $(x-1)^2x$ vagy $(x-1)x^2$

6. Adjunk felső becslést a CSB-egyenlőtlenség segítségével az $|a-2b+2c|$ értékre, ha $a,b,c\in\mathbb{R}$, és $a^2+b^2+c^2 = 4$.

$|a-2b+2c| = |\langle (a,b,c),(1,-2,2)\rangle| \le 2\cdot 3 = 6$

7. Mit jelent az, hogy egy $f(\mathbf{u},\mathbf{v})$ komplex bilineáris függvény hermitikus?

$f(\mathbf{v},\mathbf{u}) = \overline{f(\mathbf{u},\mathbf{v})}\ \ \forall \mathbf{u},\mathbf{v}$

$f(\mathbf{u},\mathbf{u}) > 0$, ha $\mathbf{u}\ne\mathbf{0}$.

8. Mi a Jordan-alakja és minimálpolinomja az A mátrixnak, ha $\mathbb{R}^5$-nek bázisa $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3,\mathbf{b}_4,\mathbf{b}_5\}$, és

$\mathbf{0} \xleftarrow{A-I} \mathbf{b}_1 \xleftarrow{A-I} \mathbf{b}_2$,

$\mathbf{0} \xleftarrow{A} \mathbf{b}_3 \xleftarrow{A} \mathbf{b}_4$,

$\mathbf{0} \xleftarrow{A} \mathbf{b}_5$?

$$\begin{bmatrix}1&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} \qquad m_A(x) = (x-1)^2x^2$$

9. Mit jelent az, hogy a V vektortér a W_i $(i \in I)$ altereinek direkt összege? *(2 pont)*

$V = \sum_{i \in I} W_i$ és $W_i \cap \sum_{j \neq i} W_j = 0$

10. Definiáljuk az általánosított sajátalteret! *(2 pont)*

Ha $A \in K^{n \times n}$, és λ sajátértéke A-nak, akkor a λ-hoz tartozó általánosított sajátaltér
$\bar{V}_\lambda = \{\mathbf{v} \in K^n \mid \exists k : (A - \lambda I)^k \mathbf{v} = \mathbf{0}\}$

11. Mondjuk ki a komplex normális mátrixokra vonatkozó spektráltételt mátrixos alakban! Mit jelent ez a feltétel a sajátvektorokra nézve? *(3 pont)*

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ normális $\Leftrightarrow$
$\exists U \in \mathbb{C}^{n \times n}: \; U^{-1}AU$ diagonális, azaz
$\mathbb{C}^n$-nek van A sajátvektoraiból álló ortonormált bázisa.

12. Mondjuk ki a mátrix hatványainak konvergenciájáról szóló tételt! *(3 pont)*

Egy $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrixra pontosan akkor konvergens az $\{A^k\}$ sorozat,
ha vagy $\rho(A) < 1$,
vagy $\rho(A) = 1$, az egyetlen 1 abszolút értékű sajátérték az 1, és ennek algebrai és geometriai multiplicitása megegyezik.

A következő két feladatot külön lapon oldjuk meg!

13. Bizonyítsuk be, hogy önadjungált mátrix minden sajátértéke valós, míg unitéré 1 abszolút értékű! *(4 pont)*

Legyen $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ sajátvektor a λ-hoz: $A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$.

Ha $A^* = A$, akkor $\left.\begin{array}{l} \mathbf{v}^*A\mathbf{v} = \mathbf{v}^*\lambda\mathbf{v} = \lambda|\mathbf{v}|^2 \\ \mathbf{v}^*A\mathbf{v} = \mathbf{v}^*A^*\mathbf{v} = (A\mathbf{v})^*\mathbf{v} = \bar{\lambda}|\mathbf{v}|^2 \end{array}\right\} \overset{\mathbf{v}\neq\mathbf{0}}{\Longrightarrow} \lambda = \bar{\lambda}$

Ha $A^* = A^{-1}$, akkor $\left.\begin{array}{l} (A\mathbf{v})^*(A\mathbf{v}) = (\lambda\mathbf{v})^*(\lambda\mathbf{v}) = \lambda\bar{\lambda}\mathbf{v}^*\mathbf{v} = |\lambda|^2|\mathbf{v}|^2 \\ (A\mathbf{v})^*(A\mathbf{v}) = \mathbf{v}^*A^*A\mathbf{v} = \mathbf{v}^*\mathbf{v} = |\mathbf{v}|^2 \end{array}\right\} \overset{\mathbf{v}\neq\mathbf{0}}{\Longrightarrow} |\lambda|^2 = 1$

14. a) Ellenőrizzük a Cayley–Hamilton-tétel állítását az alábbi A mátrixra!

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2 pont)

b) A Cayley–Hamilton tétel bizonyításának az elején felírjuk az $A - xI$ mátrixot mátrixegyütthatós polinomként (ld. lent). Tegyük meg ezt konkréten a fenti A mátrixra! *(4 pont)*

a) $k_A(x) = -x^2(x-1)$, és $A^2(A - I) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) $|A - xI| = \operatorname{adj} \begin{bmatrix} -x & 1 & 0 \\ 0 & -x & 2 \\ 0 & 0 & 1-x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 - x & 0 & 0 \\ x - 1 & x^2 - x & 0 \\ 2 & 2x & x^2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x^2 - x & x - 1 & 2 \\ 0 & x^2 - x & 2x \\ 0 & 0 & x^2 \end{bmatrix} =$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x^2 + \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Az A karakterisztikus polinomja $\det(A - xI) = k_A(x) = (-1)^n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0$.

Tudjuk: $(A - xI)\operatorname{adj}(A - xI) = \det(A - xI)I = k_A(x)I$.

$A - xI$ bármely eleméhez tartozó előjeles aldetermináns x egy legföljebb $n-1$-edfokú polinomja, így léteznek olyan konstans elemű A_0, A_1,…, A_{n-1} mátrixok, hogy

$$\operatorname{adj}(A - xI) = x^{n-1}A_{n-1} + \ldots + xA_1 + A_0.$$