E	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

NÉV ______________________________ **NEPTUNKÓD** __________

Bevezetés az algebrába 2 **1. vizsga – gyakorlat** **2020-05-28**

Minden kérdésre írjuk a válaszokat a mellette lévő dobozba. Az első feladat nyolc egyszerű kérdését kivéve minden feladat megoldását is ellenőrizzük, pontszámot a teljes megoldás alapján adunk. Az első nyolc feladat mindegyike 2 pontot, a továbbiak 8 pontot érnek. Kidolgozási idő 110 perc. Semmilyen segédeszköz nem használható!

E1. Ha $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$, akkor mi az $f : \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ transzformáció mátrixa a $\{2\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ bázisban?

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

E2. Legyen $U = \operatorname{span}((1,2,3)) \leq V = \mathbb{R}^3$. Adjunk meg két különböző vektort V-ben, amelyeknek az U-ra vett merőleges vetülete $(-1,-2,-3)$.

Például $(-1,-2,-3)$ és $(1,-3,-3)$
(Általában $(-1,-2,-3) + \mathbf{v}$, ahol $\mathbf{v} \perp (1,2,3)$.)

E3. Mi a karakterisztikus és minimálpolinomja annak a 0 nyomú 3×3-as mátrixnak, amelynek van két független sajátvektora a $\lambda = 2$ sajátértékhez?

$k(x) = (x-2)^2(x+4)$,
$m(x) = (x-2)(x+4)$

E4. Mi a legjobb felső becslés A spektrálsugarára a Gersgorin-körök alapján, ha

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1+i & i \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1-i & 0 \end{bmatrix} ?$$

$1 + \sqrt{2}$

E5. Milyen $a, b \in \mathbb{C}$-re önadjungált az $A = \begin{bmatrix} a & a+b \\ 1-i & bi \end{bmatrix}$ mátrix?

$a = 1$, $b = i$

E6. Mi a 2-normája az $A = UDV$ mátrixnak, ha U, V unitér, és $D = \operatorname{diag}(1,3,1)$?

3

E7. Tegyük fel, hogy $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ nilpotens, és $r(A^2) = 1$. Mi az A minimálpolinomja?

x^3

E8. Írjuk fel az e^{J^3} mátrixot, ha $J = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Mivel $(e^{x^3})' = 3x^2(e^{x^3})$ ezért
$\begin{bmatrix} e^8 & 12e^8 \\ 0 & e^8 \end{bmatrix}$

---

1. Melyikek hasonlók az alábbi mátrixok közül? A hasonlók ortogonálisan is hasonlók-e?

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

B, C, D hasonlók, mert a sajátértékeik $5, 1$, így C és D is diagonalizálhatók. D ortogonálisan is hasonló B-hez, mert szimmetrikus, viszont C nem szimmetrikus, így ortogonálisan nem diagonalizálható. A egyikhez sem hasonló, pl. mert a determinánsa 9, és nem 5.

2. Legyen $f:\mathbb{R}[x]_{\le 2}\to\mathbb{R}[x]_{\le 1},\quad f: p(x)\mapsto p'(x)+xp(1)$. Írjuk fel f mátrixát a standard bázisban, és a $(\mathcal{B},\mathcal{C})$ bázispárban, ahol $\mathcal{B}=\{1+x, x-x^2, x^2\}$ és $\mathcal{C}=\{1,1+x\}$. Adjuk meg f magterének egy bázisát!	$[f]_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&1&3\end{bmatrix}$, $[f]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}-1&3&-3\\2&-2&3\end{bmatrix}$ $\operatorname{Ker} f=\operatorname{span}(x^2-3)$
3. Számítsuk ki az $A=\begin{bmatrix}2&3\\1&4\end{bmatrix}$ mátrix n-edik hatványát tetszőleges módszerrel!	$\frac{1}{4}\begin{bmatrix}3+5^n&-3+3\cdot5^n\\-1+5^n&1+3\cdot5^n\end{bmatrix}$
4. Határozzuk meg az alábbi A mátrixhoz tartozó $\mathbf{x}^TA\mathbf{x}$ kvadratikus alak jellegét, és adjunk meg olyan bázist $\mathbb{R}^3$-ben, amelyben a kvadratikus alak mátrixa diagonális! $$A=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&2&1\\0&1&1\end{bmatrix}$$	Szimultán sor-oszlopművelettel a diag. alak $\operatorname{diag}(1,1,0)\Rightarrow$ pozitív szemidefinit. A hozzá tartozó bázis: $\{(1,0,0),(1,1,0),(-1,-1,1)\}$. Vagy ortogonálisan diagonalizálva: $\operatorname{diag}(3,1,0)$ és $\{\frac{1}{\sqrt6}(-1,2,1),\frac{1}{\sqrt2}(1,0,1),\frac{1}{\sqrt3}(-1,-1,1)\}$
5. Számítsuk ki az A mátrix redukált SVD-felbontását, és legjobb 1 rangú közelítését, ha $$A=\begin{bmatrix}1&3\\-3&-1\\0&0\end{bmatrix}$$	$A=\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&0\\0&2\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}$, $A^{(1)}=\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}[4]\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2\\-2&-2\\0&0\end{bmatrix}$
6. Mi az $A\in\mathbb{C}^{7\times7}$ mátrix Jordan-féle normálalakja és minimálpolinomja, ha A hatványainak rangja rendre $5,3,3$, és $A-2I$ hatványaié $6,5,4,4$?	A rangsorozatok és a differenciák: $\lambda=0$-hoz $(7,5,3,3)$, $(2,2,0)$, $(0,2)\rightsquigarrow$ 2 darab 2×2-es 0-blokk $\lambda=2$-höz $(7,6,5,4,4,)$, $(1,1,1,0)$, $(0,0,1)\rightsquigarrow$ egy 3×3-as 2-blokk $m_A(x)=x^2(x-2)^3$.
7. Adjuk meg az $x_n=4x_{n-1}-4x_{n-2}$, $x_0=x_1=1$ sorozat n-edik tagját n függvényeként!	A rekurzió karakterisztikus polinomja: $x^2-4x+4=(x-2)^2\rightsquigarrow$ $x_n=a\cdot2^n+b\cdot n2^n$. $1=x_0=a,\ \ 1=x_1=2a+2b\rightsquigarrow b=-\frac12$ $x_n=2^n-\frac12 n2^n=(2-n)2^{n-1}$
8. Határozzuk meg az alábbi mátrix Jordan-normálalakját, és adjunk meg hozzá egy Jordan-bázist! $$A=\begin{bmatrix}1&0&1&-1\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$	1-blokkokból $3+1$ felbontású. $$\mathcal{B}=\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$$