E	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

NÉV ______________________________ **NEPTUNKÓD** __________

Bevezetés az algebrába 2 **2. vizsga – gyakorlat** **2020-06-04**

Minden kérdésre írjuk a válaszokat a mellette lévő dobozba. Az első feladat nyolc egyszerű kérdését kivéve minden feladat megoldását is ellenőrizzük, pontszámot a teljes megoldás alapján adunk. Az első nyolc feladat mindegyike 2 pontot, a továbbiak 8 pontot érnek. Kidolgozási idő 110 perc. Semmilyen segédeszköz nem használható!

E1. Ha $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, akkor mi a $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$ bilineáris függvény mátrixa a $\{2\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ bázisban?

$$\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

E2. Mik alkotják a magterét, és mi a rangja az $A \mapsto A + A^T$ transzformációnak az $\mathbb{R}^{2\times 2}$ vektortéren?

Magtér: ferdén szimmetrikus mátrixok.
A magtér 1-dimenziós $\Rightarrow$ a rang $4 - 1 = 3$.

E3. Mi a nyoma és a determinánsa egy olyan valós 3×3-as A mátrixnak, amelynek 1 és $1 + i$ is sajátértéke?

A sajátértékek $1,\ 1+i,\ 1-i \Rightarrow$
$\operatorname{tr} A = 3$
$\det A = 2$

E4. Adjuk meg annak a Givens-forgatásnak a mátrixát, amelyik az $(1, 0, -1)$ vektort a $(\sqrt{2}, 0, 0)$ vektorba viszi!

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

E5. Legyen $M \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, amelyre $\operatorname{tr} M = 0$, és $\det M = d$. Párosítsuk a betűvel és számmal jelölt tulajdonságokat!
(A): M önadjungált (1): $d \le 0$
(B): M ferdén önadjungált (2): $|d| = 1$
(C): M unitér (3): $d \ge 0$ valós.

A1, B3, C2

E6. Számítsuk ki az A mátrix pszeudoinverzét, ha az A redukált SVD felbontása

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} [\,3\,] \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [1/3] \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

E7. Hány lényegesen különböző (azaz egymásba báziscserével nem átvihető) kvadratikus alak van $\mathbb{R}^2$-en?

A kanonikus alak diagonális elemei $(1, 1)$, $(-1, -1)$, $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, -1)$, $(-1, 0)$ lehetnek, tehát 6-féle van.

E8. Írjuk át az $x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2} + 1$ rekurziót mátrixos alakba!

$$\begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

---

1. Legyen $f : \mathbb{R}[x]_{\le 1} \to \mathbb{R}[x]_{\le 2}$, $\ f : p(x) \mapsto xp(x) + p'(x)$. Írjuk fel f mátrixát a standard bázisban, és a $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ bázispárban, ahol $\mathcal{B} = \{1 - x, x\}$ és $\mathcal{C} = \{1, x - x^2, x^2\}$.

$$[f]_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad [f]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Ortogonalizáljuk az

$$\{(1,0,i),(2,1,0),(1,-3,i)\}$$

vektorrendszert Gram–Schmidt-ortogonalizációval (ebben a sorrendben)!

$\{(1,0,i),(1,1,-i),(1,-2,-i)\}$

3. Írjuk fel az $x^2-4xy+5y^2+2xz+5z^2$ kvadratikus alak mátrixát, határozzuk meg a jellegét, továbbá adjunk meg olyan nemnulla vektorokat (ha vannak), amelyeken a kvadratikus alak pozitív, negatív, illetve nulla értéket vesz föl!

$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ pozitív szemidefinit

Pl. $q(\mathbf{e}_1)=1>0$ és $q((5,2,-1))=0$

$q(\mathbf{v})<0$ nem lehet, mert q pozitív szemidefinit.

4. Határozzuk meg az $A=\begin{bmatrix} 20 & -10 \\ -10 & 5 \end{bmatrix}$ mátrix pozitív szemidefinit négyzetgyökét!

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Írjuk fel az alábbi A mátrix redukált és teljes QR-felbontását.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Redukált: $A=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

Teljes: $A=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{10} \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 0 & 8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

6. Határozzuk meg az alábbi A mátrixnak és A^2-nek a Jordan-normálalakját!

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$k_A(x)=-x^3$, $m_A(x)=x^3 \Rightarrow A\sim\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

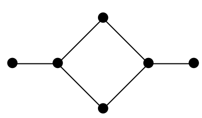
$\Rightarrow A^2\neq 0$, de $A^4=0$

$\Rightarrow m_{A^2}(x)=x^2 \Rightarrow A^2\sim\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

7. Hasonlóság erejéig hány olyan 6×6-os mátrix van, amelynek csak 1 és 2 a sajátértékei, és az 1-hez tartozó sajátaltere 3-dimenziós?

Három 1-blokk van.
$\dim\bar{V}_1=3$ és $\dim\bar{V}_2=3$: $1\cdot 3=3$ lehetőség.
$\dim\bar{V}_1=4$ és $\dim\bar{V}_2=2$: $1\cdot 2=2$ lehetőség.
$\dim\bar{V}_1=5$ és $\dim\bar{V}_2=1$: $2\cdot 1=2$ lehetőség.
Összesen 7 páronként nem hasonló ilyen mátrix van.

8. Milyen alsó és fölső korlátot adnak az alábbi gráf spektrálsugarára a fokszámok? Mutassuk meg, hogy 0 és 1 is sajátértéke a gráfnak!



$\bar{d}=\frac{1}{6}(1+1+2+2+3+3)=2\leq\rho(A)\leq 3$, ahol A a szomszédsági mátrix.

$\lambda=0$: pl. $\qquad\lambda=1$: pl.