1	2-8	9-12	13-	Σ

NÉV ______________________________ **NEPTUNKÓD** __________

Bevezetés az algebrába 2 **1. vizsga – elmélet** **2020-05-28**

A tesztkérdésekre 20, a definíciók, tételek precíz megfogalmazására 10, a bizonyításos részre 10 pont kapható. A válaszokat írjuk a kérdéshez tartozó üres dobozba, vagy külön lapon a feladatlap beosztásának megfelelő helyre, jól láthatóan elkülönítve az egyes feladatokat! Kidolgozási idő 60 perc. Segédeszköz nem használható!

1. Mindegyik állításról állapítsuk meg, hogy igaz vagy hamis (I|H)! *(6 pont)*

a) Minden altérnek van direkt kiegészítője.

b) Egy euklideszi tér nemnulla vektora tetszőleges nemnulla vektorba átvihető hipersíkra való tükrözéssel.

c) Ha a C valós mátrix teljes sorrangú, akkor C^TC pozitív definit.

d) Minden valós mátrix ortogonálisan hasonló egy háromszögmátrixhoz

e) Minden nemüres gráf szomszédsági mátrixa indefinit.

f) Egy $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrixra $r(A^k) - r(A^{k+1})$ nem lehet nagyobb a Jordan-alakjában a 0-hoz tartozó Jordan-blokkok számánál.

2. Mondjuk ki azokat a vektortér-axiómákat, amelyekben szerepel skalár is, és vektorok összeadása is. *(2 pont)*

3. A következők közül melyek invariánsak a hasonlóságra?
(A) nyom (B) főminorok (C) rang (D) oszloptér *(2 pont)*

4. Ha $A = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} + 1 \cdot P_2$ spektrálfelbontás, akkor mi a P_2 és az A mátrix? *(2 pont)*

5. Ha Q szemiortogonális mátrix, akkor mik a Q szinguláris értékei és mi a pszeudoinverze? *(2 pont)*

6. Mik lehetnek a sajátértékei egy olyan mátrixnak, amely egyszerre unitér és ferdén önadjungált? *(2 pont)*

7. Legyen $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{y}$ valós bilineáris függvény, ahol $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. Adjunk meg olyan $\mathbf{v}$ vektort, amelyre $\varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{v}) = 2$. *(2 pont)*

8. Legyen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Az $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ hány részhalmaza generál A-invariáns alteret?

9. Definiáljuk egy $f : V \to W$ lineáris leképezés magterét és képterét! *(2 pont)*

10. Mit jelent az, hogy egy f függvény értelmezve van az A mátrix spektrumán, és hogyan definiáljuk ilyen függvényre az $f(A)$ mátrixot? *(3 pont)*

11. Mondjuk ki a komplex euklideszi térben érvényes háromszögegyenlőtlenséget, az egyenlőség feltételével együtt! *(3 pont)*

12. Mondjuk ki a Cayley–Hamilton-tételt! *(2 pont)*

A következő két feladatot külön lapon oldjuk meg!

13. Mondjuk ki és bizonyítsuk be a minimálpolinom gyökeiről szóló tételt! *(3 pont)*

14. A QR-felbontás egyértelműségének vázlatos bizonyítása:

$A = QR = Q'R'$
$\Rightarrow Q = Q'R'R^{-1}$
$S := R'R^{-1},\ \ Q = Q'S$
$I = Q^TQ = S^T(Q')^TQ'S = S^TS$
$\Rightarrow S^T = S^{-1}$ alsó és felső $\triangle$ is

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} S \text{ diagonális,} \\ \text{és így } S \text{ szimm.} \Rightarrow I = S^TS = S^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad S = I \ \Rightarrow\ R = R' \ \Rightarrow\ Q = Q'$$

a) Mik a feltételek a QR-felbontás Q és R mátrixára? *(2 pont)*

b) Hol és hogyan használjuk a bizonyításban az R diagonális elemeire vonatkozó feltételt? *(3 pont)*

c) Adjunk az $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ QR-felbontású mátrixra egy másik felbontást, ahol a b) részben említett feltételt nem követeljük meg, de a többit igen. *(2 pont)*